

Örüntü ve İlişkiler: Eski Çin Matematiğinden Alınmış Birim Küp Modelleri

Suphi Önder BÜTÜNER*

ÖZ. Eski Matematik bilginlerinin kullandıkları modellerin günümüz sınıflarında öğrenciler tarafından kullanılması matematik tarihinin kullanım yollarından biridir. Bu öğretim uygulaması, Çinli Matematikçi Yang Hui (1238-1298) ve modelleme düşüncesine dayalı olarak geliştirilmiştir. Eski matematik bilginlerinden Yang Hui tarafından kullanılan modellerin, öğretim ortamında öğrenciler tarafından kullanılması istenerek, matematik tarihinin öğretim ortamında nasıl kullanılabileceği ortaya koyulmuştur. Etkinlik, ardışık pozitif tamsayıların, üçgensel ve karesel sayıların toplamını bulmak için kullanılan kuralların öğrenciler tarafından keşfedilmesi amacıyla hazırlandığından matematik tarihinin araç olarak kullanımına hizmet etmektedir. Bu etkinlik ile öğrencilerden, modeller kullanarak örüntülerden genellemelere ulaşmaları beklenmektedir. Etkinlik, ilköğretim 8. sınıf düzeyinde, Cebir öğrenme alanının, örüntüler ve ilişkiler alt öğrenme alanı içerisinde kullanılabilir. Hazırlanan bu öğretim uygulamasının, matematik tarihinin öğretim ortamında nasıl kullanılabileceği konusunda öğretmenlere ışık tutması açısından önemli olduğu düşünülmektedir.

Anahtar Sözcükler: Örüntü ve İlişkiler, Birim Küp Modelleri, Eski Çin Matematiği

GİRİŞ

Matematik Öğretim Programında, öğrencilerin geçmiş deneyimleri dikkate alınarak, bilgi üretme sürecine aktif olarak katılmalarının sağlanması gerektiği vurgulanmaktadır. Matematikteki kavramlar doğası gereği soyut olduklarından, matematiksel kavramların somut ve sonlu yaşam modelleri kullanılarak öğretilmesi gerekmektedir. Bu modeller, öğrencilerin geçmiş deneyimlerini harekete geçirmek dışında, öğrencilerin kavramsal öğrenmelerini sağlamaktadırlar (MEB, 2005). Öğrencilerin psikomotor becerilerini kullanmalarına, kavram ve problemlerin çözümlerini yaparak yaşayarak, kavramsal olarak öğrenmelerine fırsat sunan, görsel açıdan zengin olan modelleri matematik tarihi içerisinde görmek mümkündür (Reimer ve Reimer, 1992, s.4; Swetz, 1994, s.152-153; Mitchell, 1995, s.17-18; Berlinghoff ve Gouvea, 2004, s.127-128).

Matematik tarihinin öğretim ortamında kullanılması gerektiği fikri yeni değildir. NCTM, Amerikan Ulusal Öğretmenler Birliği (National Council of Teachers of Mathematics), matematik tarihinin matematik öğretiminde kullanılmasını teşvik etmektedir (Fried, 2001). Alanyazında matematik tarihinin öğretim ortamına nasıl kullanılabileceği konusunda değişik görüşlere rastlanmaktadır. Fried (2001), matematik tarihinin kullanımı için ekleme ve uyarılma stratejileri olmak üzere iki, Jankvist (2009) ise tarihe dayalı, aydınlatma ve modül stratejileri olmak üzere üç strateji önermişlerdir. Aydınlatma ve ekleme stratejilerinde mevcut müfredat değiştirilmeden tarihten seçilen problemler, tarihteki matematikçilerin kullandıkları modeller, anekdotlar, matematikçilerin hayat hikâyeleri, resimleri vb. müfredat içine eklenmektedir. Ancak kullanılacak stratejinin neden kullanılacağı sorusu oldukça önemlidir. Jankvist (2009), matematik tarihinin amaç olarak ve araç olarak kullanımı üzerinde durmuştur. Matematik tarihinin amaç olarak kullanımı, matematiğin sosyolojik, epistemolojik ve tarihsel konularına odaklanırken, araç olarak kullanımı matematiği öğrenme, tutum, motivasyon gibi bilişsel ve duyuşsal boyutlara odaklanmaktadır.

Bu öğretim uygulamasında, matematik tarihinin öğretim ortamında kullanımı, matematik tarihinin araç olarak kullanımı dikkate alınarak aydınlatma stratejine uygun olarak gerçekleştirilmiştir. Nitekim matematik öğretim programı değiştirilmemiş, bilişsel ve duyuşsal boyutlar dikkate alınmıştır.

¹Çalışmanın Önemi ve Amacı

Matematiği birbirinden ayrı ilişkisiz kurallar ve yöntemler topluluğu olarak gören ve ilkeleri ve kuralları ezberleyerek bir problemi çözmeye çalışan öğrenci işlemsel öğrenmeye yatkın bir öğrenci olarak tanımlanmaktadır (Baki, 2008).

¹ KTÜ Eğitim Bİm Enstitüsü İlköğretim Bölümü Doktora Öğrencisi, Mat. Öğretmeni, onderbutuner@mynet.com

Aksine kavramsal öğrenme gerçekleştiren öğrenci, matematiği birbirine bağlı kavramlar ve düşünceler ağı olarak görür ve bu matematiksel kavramları ve düşünceleri dışarıdan kopya etmek yerine bizzat kendisi anlamlandırmaya çalışır. İlköğretim matematik öğretim programı kavramsal olarak öğrenen bireyler yetiştirmeyi amaçlamaktadır (Baki, 2008). Bu doğrultuda, matematik bilginin inşasında, öğrencilerin daha fazla etkileşimli öğrenme deneyimleriyle, hands-on etkinlikleriyle ve problem çözmeye dayalı etkinliklerle karşı karşıya bırakılmaları önerilmektedir (Wang, 2009). Hands-on etkinlikleri, öğrencilerin geçmiş deneyimlerini harekete geçirmek dışında, öğrencilerin kavramsal öğrenmelerini de sağlamaktadır (MEB, 2005). Öğrencilerin kesme yapıştırma boyama ve birleştirme yaparak Pisagor bağıntısının kuralını keşfetmeleri, tahta parçalarını birleştirerek prizmanın hacmine ulaşmaları, birim küplerle oluşturdukları modellerle örüntülerden genellemeler yapmaları birer hands-on etkinliği olarak düşünülebilir.

Matematik tarihi incelendiğinde, eski matematik bilginlerinin problem çözümlerinde bir yol olarak, kesme parçalara ayırma, birim küplerden modeller oluşturarak genellemelere ulaşma gibi yolları tercih ettikleri görülmektedir (Siu, 1993, s.350 ; Swetz, 1994, s.139; Veljan, 2000, s.263). Bu bakımdan Matematik Tarihinin Matematik Öğretiminde kullanımı, birçok araştırmacı tarafından desteklenmektedir (Bidwell, 1993; Ernest, 1998; Gulikers ve Blom, 2001; Liu, 2003). Matematik tarihinin matematik derslerinde kullanılmasının öğrencilerin başarılarını ve matematiğe yönelik tutumlarını arttırdığını ortaya koyan çalışmalar (Mcride ve Rollins, 1977; Leng, 2010), olduğu gibi matematik tarihinin kullanımını engelleyici faktörlerin olduğunu savunan araştırmacılar da vardır. Siu (2004) ve Tzanakis ve Arcavi (2001), Matematik tarihinin kullanımının önündeki engelleri belli nedenlerle açıklamışlardır. Bu nedenlerden bazıları “Matematik tarihini kullanımı için yeterli zamanın olmayışı”, “Öğrencilerin başarıları üzerinde olumlu bir etki yaratmayacağı”, “Öğrencilerin Matematik tarihini sevmediği”, “Matematik tarihi ile yapılan öğretimin değerlendirilmesine ilişkin ölçütlerin olmayışı”, “Öğretmenlerin bu konudaki bilgi, beceri eksikliği” ve “Materyal sıkıntısı” şeklinde sıralanabilir.

Ülkemizde, İlköğretim Matematik programının genel amaçları arasında matematik tarihinin kullanımına vurgu yapılmasına rağmen (URL-1), matematik tarihinin öğretim ortamında nasıl kullanılabileceği konusunda rehber olabilecek kaynakların yetersiz olduğu görülmektedir. Alanyazında matematik tarihinin öğretim ortamında kullanımı konusunda öğretmen ve öğretmen adaylarına rehber olabilecek yazım dili Türkçe olan sınırlı sayıda çalışmaya rastlanmaktadır (Bütüner, 2008; Karakuş, 2009). Bu nedenle, matematik tarihinden alınan modeller öğretim ortamına dahil edilerek, konunun öğretimini gerçekleştirmeye yönelik bir etkinlik tasarlanmıştır. Hazırlanan bu öğretim uygulamasının, matematik tarihinin öğretim ortamında nasıl kullanılabileceği konusunda öğretmenlere ışık tutması açısından önemli olduğu düşünülmektedir.

Öğretim Uygulaması: Konu, Sınıf Düzeyi, İçerik

Bu öğretim uygulaması ile Eski matematik bilginlerinden Yang Hui tarafından kullanılan modellerin, öğretim ortamında öğrenciler tarafından kullanılması sağlanarak, matematik tarihinin öğretim ortamında kullanımı gerçekleştirilmiştir. Öğretim uygulaması, Matematik Tarihinin araç olarak kullanımı dikkate alınarak, ardışık pozitif tamsayıların, üçgensel ve karesel sayıların toplamını bulmak için kullandığımız kuralların öğrenciler tarafından keşfedilmesi amacıyla hazırlanmıştır. Öğrencilerden, modelleri kullanarak örüntülerden genellemelere ulaşmaları beklenmektedir. Etkinlik ilköğretim 8. sınıf düzeyinde, Cebir öğrenme alanının, örüntüler ve ilişkiler alt öğrenme alanı içerisinde kullanılabilir.

Yang-Hui (1238-1298), 13. yüzyıl Çin matematiğinin en önemli matematikçilerinden biridir. En ünlü eseri “*Xiang Jie Jiu Zhang Suan Fa*” (*Dokuz bölümdeki matematik kurallarının detaylı analizi ve yeniden sınıflandırılması*) isimli çalışmasıdır. Yang-Hui, bu çalışmasında, Eski Çin matematiğinin en önemli kitabı olan “*Dokuz bölüm*” adlı eserin detaylı analizini yapmış, bu kitaptaki 246 problemden 80’ini seçmiş ve çözümlerini tartışmıştır. Yang Hui’nin diğer çalışması ise 1275’te yazdığı Yang Hui’nin “*Hesaplama Yöntemleri*” adlı kitabıdır. Bu kitap; çarpma ve bölme işlemleri, kök bulma, ikinci dereceden ve doğrusal denklem sistemleri, seriler, dikdörtgen, yamuk, daire ve diğer geometrik şekillerin alanları konularını içermektedir. Yang-Hui’nin en önemli çalışması ardışık pozitif tam

sayıların, üçgensel sayıların ve karesel sayıların toplamını bulmak için yapmış olduğu modellemelerdir (Wang, 2009). Ardışık tamsayıların, üçgensel ve karesel sayıların M.Ö 570-500'lerde Pisagor okulunun bir buluşu olduğunu da bilmemiz de yarar vardır (Reimer ve Reimer, 1992). Yang Hui, geliştirdiği yöntemle aşağıdaki sayı örüntülerini modelleyerek toplamını bulmuştur.

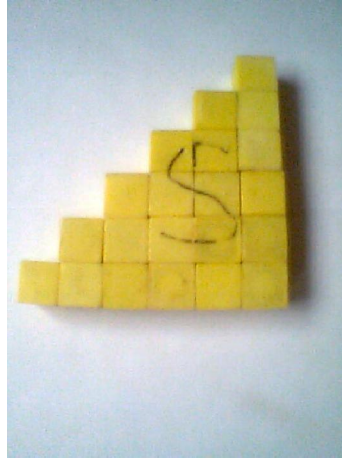
- ❖ 1'den n'e kadar sayıların modellenmesi ve toplamı; $1+2+3+4+\dots+n$
- ❖ Üçgensel sayıların modellenmesi ve toplamı; $1+3+6+10+\dots+\frac{n(n+1)}{2}$
- ❖ Karesel sayıların modellenmesi ve toplamı; $1+4+9+16+\dots+n^2$

Ardışık Pozitif Tamsayıların Toplamı Etkinliği

Aşağıdaki yönergeleri izleyerek 1'den n'ye kadar olan sayıların toplamı için kullanacağımız kuralı keşfetmeye çalışınız.?

Yönergeler

1. 1'den 6'ya kadar olan sayıları modellemek için birim küpler kullanılmıştır. $1+2+3+4+5+6=?$ Toplamında n sayısı kaçtır? Öğrencilerden cevap alınmadığı takdirde, Aşağıdaki şekilde gördüğünüz gibi 1 sayısını ifade etmek için sol tarafa 1 adet birim küp, 2 sayısını ifade etmek için hemen yanına üst üste olacak şekilde 2 adet birim küp koyulmuştur, şeklinde bir açıklama yapılabilir. Ardından, öğrencilerden üç sayısının nasıl gösterildiğini açıklamaları istenebilir. Bu şekilde n sayısının kaçta eşit olduğu öğrencilere hissettirmeye çalışılır.



Şekil 1. 1'den 6'ya (n) kadar olan sayıların modellenmesi

2. Şekil 1'deki modeldeki küp sayısının neyi ifade ettiği öğrencilere sorulur. Öğrencilerden cevap alınmazsa öğrencilere yol gösterici sorular sorulabilir. Şekil 1'i elde etmek için kullandığımız küp sayısına 'S' diyelim. Şekil 1'i kenar uzunluğu n olan kareye tamamlamamız için kaç tane birim küpe ihtiyacımız vardır? S cinsinden yazınız şeklinde bir soru sorularak, öğrencilere kareye tamamlama işlemini yapmaları ve modeldeki küp sayısını matematiksel olarak ifade etmeleri için zaman verilir.



Şekil 2. Kareye tamamlamak için kullanılan model



Şekil 3. Elde edilen kare modeli

3. Şekil 3'te elde ettiğiniz geometrik şekildeki toplam küp sayısını nasıl bulursunuz? Bu aşamada öğrencilerin çarpma işlemini kavramsal olarak anlayıp anlamadıkları da test edilmiş olacaktır.

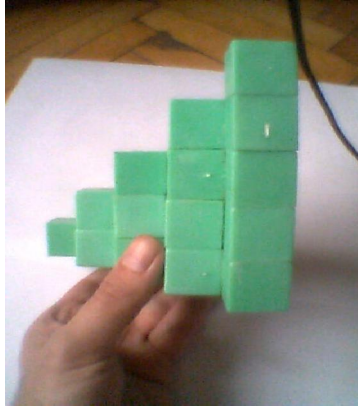
4. Şekil 3'teki modelde, toplam küp sayısını veren ifadeleri birbirine eşitleyerek ve n sayısının değerini dikkate alarak, $1+2+3+4+5+6$ toplamını n cinsinden yazınız. Bulduğunuz sonucu arkadaşlarınızla tartışınız?

Üçgenel Sayıların Toplamı Etkinliği

Aşağıdaki yönergeleri izleyerek $1+3+6+\dots+\frac{n(n+1)}{2}$ şeklinde ifade edilen üçgenel sayıların toplamı için kullanacağımız kuralı keşfetmeye çalışınız?

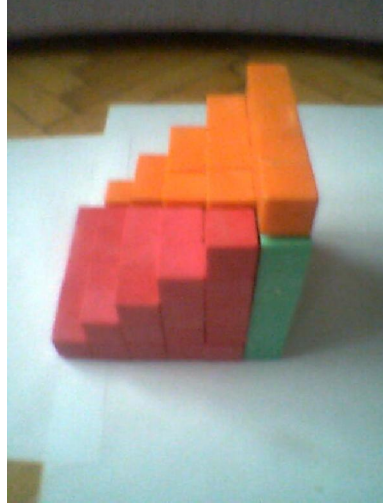
Yönergeler

1. Aşağıda $1+3+6+10+15$ üçgenel sayılarına ait modeller görülmektedir. Bu modellerde n sayısının kaçta eşit olduğunu ifade ediniz?



Şekil 4. $1+3+6+10+15$ üçgenel sayılarının modellenmesi

2. Yukarıda verilen üçgenel sayı modellerini aşağıdaki gibi birleştiriniz?



Şekil 5. Modellerin birleştirilmesi

3. Elde edilen şekli Adım 1’de gösterilen parçaları tekrar oluşturarak dikdörtgenler prizmasına tamamlayınız. Öğrencilere, gerekli tamamlama işlemini yapması için zaman verilir.



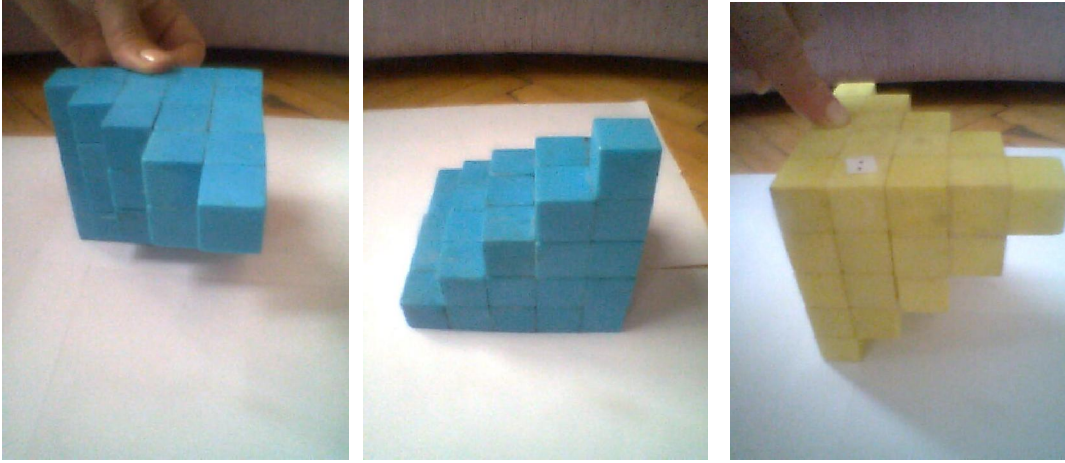
Şekil 6. Modellerin birleştirilmesi sonucu oluşturulan prizma modeli

4. Tamamlama işleminin yapılmasının ardından, prizmayı oluşturan altı adet modelin her birinin $1+3+6+10+15$ ($n=5$) üçgensel sayılarının toplamını gösterdiğini öğrencilerin fark etmeleri sağlanır. Prizmanın oluşturulması için kullandığınız üçgensel sayı modellerinin sayısı dikkate alınarak, şekildeki toplam küp sayısının nasıl bulunması gerektiği öğrencilere sorulur. Bu soru öğrencilerin hacim kavramını kavrayıp kavramadığının da bir göstergesidir. Modelin hacmi toplam küp sayısını vereceğinden, öğrencilerden $V=a.b.c$ eşitliğini n cinsinden yazmaları ve kullandıkları üçgensel sayı modellerinin sayısını dikkate alarak $1+3+6+10+15$ ($n=5$) toplamına ulaşmaları istenir.

Karesel Sayıların Toplamı Etkinliği

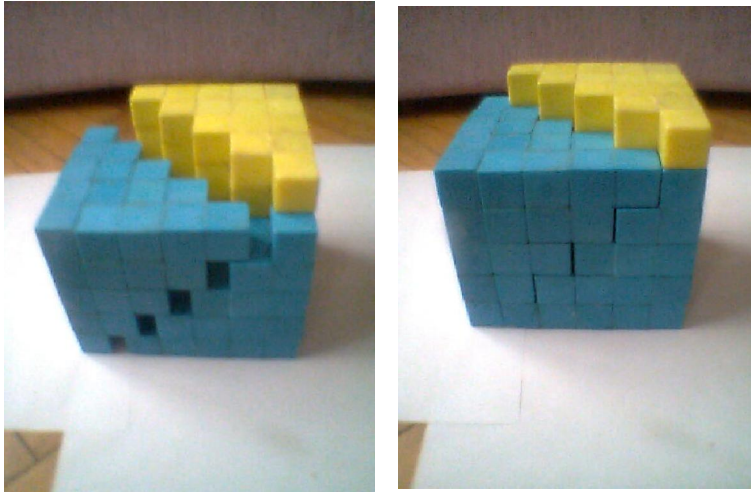
Aşağıdaki yönergeleri izleyerek $1+4+9+16+\dots+n^2$ şeklinde ifade edilen karesel sayıların toplamı için kullanacağımız kuralı keşfetmeye çalışınız.?

1. Aşağıda $1+4+9+25$ karesel sayılarına ait modeller görülmektedir. Bu modellerde n sayısının kaç eşit olduğunu ifade ediniz?



Şekil 7. 1+4+9+25 karesel sayılarının modellenmesi

2. Yukarıda verilen karesel sayı modellerini aşağıdaki gibi birleştiriniz?



Şekil 8. Karesel sayı modellerinin birleştirilmesi sonucu oluşan model

3. Şeklin üstünde kalan sarı renkli küpleri kullanarak, şekli prizma yapabilir misiniz? (Burada şeklin üstünde kalan ve fazlalık olan sarı renkli küplerin yataydan ikiye bölünerek, boş kısma koyulması gerekmektedir).

4. Prizmanın kenarlarını n cinsinden yazınız ve toplam küp sayısını bulunuz?

5. Prizmanın oluşturulması için kullandığımız karesel sayı modellerinin sayısına dikkat ederek, $1+4+9+16+\dots+n^2$ toplamını n cinsinden ifade ediniz?

SONUÇ VE ÖNERİLER

Birinci etkinlikte öğrencilere $1+2+3+4+5+6$ toplamını ifade eden model gösterilerek n sayısının kaçta eşit olduğunu ifade etmeleri istenir (öğrencilerin bu modelleri kendilerinin oluşturması da istenebilir). $1+2+3+4+5+6$ toplamını ifade eden modeldeki küp sayısı S olsun açıklaması yapıldıktan sonra, öğrencilerden birim küpleri kullanarak, verilen modeli kenar uzunluğu n olan kareye tamamlamaları beklenir. Ardından oluşan kare modelindeki toplam küp sayısının nasıl bulunması gerektiği sorulur ve modeldeki küp sayısını matematiksel olarak yazmaları istenir. Sonuçta bu iki modeli oluşturan toplam küp sayısı $(1+2+3+4+5+6+1+2+3+4+5)$ karenin alanına eşit olacaktır. Bu durumun matematiksel ifadesi aşağıda verilmiştir. $1+2+3+4+5+6$ ($n=6$) toplamı S olsun. O halde $1+2+3+4+5=S-n$ olacaktır.

$$S + (S - n) = n.n \Rightarrow 2S = n.n + n$$

Buradan, $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ genellemesine ulaşılabılır.

İkinci etkinlikte öğrencilere 1+3+6+10+15 (n=5) toplamında n sayısının kaçta eşit olduğu sorulur. Ardından öğrencilerden, kullanılan altı adet modelin her birinin 1+3+6+10+15 (n=5) toplamını gösterdiğini fark etmeleri beklenir. Yukarıda da görüldüğü gibi altı adet modelin uygun şekilde birleştirilmesi sonucu bir prizma modeli elde edilecektir. Bu noktada elde edilen toplam küp sayısına prizmanın hacmi bulunarak ulaşılabılır. Altıncı sınıfın altıncı ünitesinde prizmanın hacmi konusu öğretilmektedir. Dolayısıyla yapılan etkinliğin, öğrencilerin ön bilgilerini harekete geçirmesi, öğretmenlere öğrencilerinin geçmiş konuları ne düzeyde anlayıp anlamadıkları hakkında fikir vermesi açısından da önemli olduğu düşünülmektedir. Elde edilen prizmanın hacmi $n(n+1)(n+2)$ olarak bulunacaktır. Buradan, 1+3+6+10+15 toplamının sonucu, prizmanın hacmi altıya bölünerek

$$1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \text{ olarak elde edilecektir.}$$

Üçüncü etkinlikte ise öğrencilere 1+4+9+16+25 (n=5) toplamında n sayısının kaçta eşit olduğu sorulur. Ardından öğrencilerden, kullanılan üç adet modelin her birinin 1+4+9+16+25 (n=5) toplamını gösterdiğini fark etmeleri beklenir. Üç adet modelin uygun şekilde birleştirilmesi sonucu Şekil 8'de görülen yapı elde edilecektir. Burada öğrencilerden bu yapıyı prizma biçimine getirmeleri istenir. Yapının üst yüzünde kalan sarı birim küplerin ikiye bölünerek boş olan kısma koyulması, prizma modeline ulaşılabılığını sağlayacaktır. O halde prizmanın ayrıtları n , $n+1$, $n+1/2$ olduğundan, prizmanın hacmi $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$ olarak bulunacaktır. Buradan, 1+4+9+16+25 toplamının sonucu, prizmanın hacmi üçe bölünerek

$$1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ olarak elde edilecektir.}$$

Bu çalışma, Eski Çin Matematiğinden alınmış modellerin ve ispat biçimlerinin, günümüz sınıflarında nasıl uygulanabileceğini göstermesi açısından matematik tarihinin derslerde kullanımına bir örnek teşkil etmektedir. Matematik tarihi, öğretim ortamında kullanılabilirlik açısından, zengin bir içeriğe sahiptir. Ancak matematik tarihinin sınıflarda etkili bir şekilde kullanılabilmesi için matematik tarihinin içeriğinin, kullanım yollarının ve nasıl kullanılabileceğine dayalı stratejilerin iyi bilinmesi gerekmektedir. Bu doğrultuda, matematik öğretim programının genel amaçları ve içeriği dikkate alınarak, uygun strateji ve kullanım yolları ile matematik tarihinin derslerde kullanımını sağlanmalıdır.

KAYNAKLAR

- Baki, A. (2008). *Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi*. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılığı.
- Berlinghoff, P. W. & Gouvea, Q. F. (2004). *Math through the ages: a gentle history for teachers and others*. Farmington: Oxton Publishers.
- Bidwell, J. (1993). Humanize your classroom with the history of mathematics. *Mathematics Teacher*, 86(6), 461-464.
- Bütüner, S. Ö. (2008). Sekizinci Sınıf Denklemler Konusunun Matematik Tarihi Kullanılarak Öğretimi. *İlköğretim Online*, 7(3), 6-10.
- Ernest, P. (1998). The history of mathematics in the classroom. *Mathematics in School*, 27(4), 25-31.
- Fried, N. M. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist?. *Science and Education*, 10, 391-408.
- Jankvist, T. U. (2009). A categorization of the whys and hows of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 235-261.

- Karakuş, F. (2009). Matematik Tarihinin Matematik Öğretiminde Kullanılması: Karekök Hesaplama Babil Metodu. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitim Dergisi*, 3(1), 195-206.
- Leng, W. N. (2006). Effects of an ancient chinese mathematics enrichment programme on secondary school students' achievement in mathematics. *International Journal of Science and Mathematical Education*, 4, 485-511.
- Liu, H. P. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching?. *Mathematics Teacher*, 96(6), 416-421.
- McBride, C. C. & Rollins, H. J. (1977). The effects of history for mathematics on attitudes toward mathematics of college algebra students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8(1), 57-61.
- MEB, Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı (2005). *İlköğretim 6-8. sınıflar öğretim programı kitabı*. Ankara.
- Mitchell, M. (1995). *Mathematical history, activities, puzzles, stories and games*. Virginia: National Council of Mathematics Teacher.
- Reimer, W. & Reimer, L. (1992). *Historical connections in mathematics Volume I*. California: AIMS Educational Foundation.
- Siu, M. K. (2004). "No, I do not use history of mathematics in my class. Why?". *Paper presented at the HPM Satellite meeting*, Uppsala.
- Siu, M. K. (2003). Proof and pedagogy in ancient china: examples from Liu Hui's commentary on Jiu Zhang Suan Shu. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 345-357.
- Swetz, J. F. (1994). *Learning activities from the history of mathematics*. Portland: Walch Publishing.
- Tzanakis, C. & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In Favuel, J. & Van Manen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education*, (pp. 201-240). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- URL-1. <http://ttkb.meb.gov.tr/ogretmen/>
- Veljan, D. (2000). The 2500-year old pythagorean theorem. *Mathematics Magazine*, 73(4), 259-272.
- Wang, Y. (2009). Hands-on mathematics: two cases from ancient Chinese mathematics. *Science & Education*, 18, 631-640.