

Assessing Grade 8 Elementary School Mathematics Curriculum and Textbooks within the Scope of Fractal Geometry

Fatih KARAKUŞ¹ Adnan BAKİ²

ABSTRACT. Fractals are recently integrated into mathematics curriculums in Turkey. Because the integration process is successful, it is important that the studies of teaching fractals in the mathematics curriculum and textbooks should be assessed. The purpose of this study was to assess the grade 8 elementary school mathematics curriculum, textbooks and workbooks within the scope of fractal geometry. In this respect, in the first part of the study the basic characteristics of fractals were defined. And the other parts of the study, the studies in the mathematics curriculum and textbooks within the scope of fractals were evaluated and some suggestions were recommended.

Key Words: Fractal geometry, teaching fractals, mathematics curriculum.

SUMMARY

Purpose and significance: Curriculum documents such as curriculum guidelines, textbooks and workbooks are the main resources for teachers and students for a course. Fractals are new area in mathematics and they began to take place in the mathematics curriculums in recent years. Therefore, it is necessary and important to determine the appropriateness of the presentation of fractals in curriculum documents such as program guidelines, textbooks and students' workbooks. The purpose of this study was to assess the grade 8 elementary school mathematics curriculum and textbooks within the scope of fractal geometry.

Methods: The main purpose of this study was to define and explain the situation deeply. So, the descriptive approach was used. Data were collected from mathematics textbooks, workbooks and teachers' books which are used in different cities in Turkey. The textbooks and other curriculum documents were examined within the scope of fractals' characteristics. It was examined that concepts, definitions, comments, examples and activities about fractals are whether accurate and adequate in those documents.

Results: As a result of the study in the 8 grade mathematics curriculum, fractals are introduced with just one goal. But, it is viewed that the reasons of integration of fractals into the curriculum is not clear enough. Moreover, in the textbooks, workbooks and teachers' books, some mistakes and lack of knowledge are identified with the definition, examples, activities and explanations used to gain this goal. Furthermore, it was determined that natural fractals and their characteristics are not included in the textbooks and workbooks. In the textbooks, the drawing activities are often preferred generating fractals, whereas computer activities or concrete materials are not placed enough. Also, it was determined that the mathematical background (finding patterns or generalizing patterns activities) of fractals are not involved in the textbooks.

Discussions and Conclusions: According to the results, it was not explained that why the fractals are integrated into the 8 grade mathematics curriculum. They were established only a kind of pattern in the 8 grade mathematics curriculum. But, the finding patterns activities are not included in the textbooks and workbooks. The definition of fractal in the textbooks included only one fractal characteristic "self-similarity". But, iteration is the other important characteristic of fractals and it makes to generate the fractal pattern. This situation can make it difficult to decide whether a given object is fractal or not. In addition, the definition of fractals in the textbooks is inadequate for describing natural fractals. In the textbooks and workbooks, the activities relate only drawing fractals instead understanding what fractals are. Moreover, when building a fractal pattern, activities with concrete models and computer programs are not included in the textbooks. Using concrete models building a fractal pattern can help to understand how a fractal forms. Also, using computers activities for building fractals can enable the more realistic fractal shapes.

¹ Res. Assist. Dr. Fatih KARAKUŞ, Karadeniz Technical University, fkarakus58@gmail.com

² Prof. Dr. Adnan BAKİ, Karadeniz Technical University, abaki@ktu.edu.tr

İlköğretim 8. Sınıf Matematik Öğretim Programı ve Ders Kitaplarının Fraktal Geometri Konusu Kapsamında Değerlendirilmesi

Fatih KARAKUŞ¹ Adnan BAKİ²

ÖZ. Fraktal geometri son yıllarda matematik öğretim programlarımızda yer almaya başlayan bir konudur. Bu konunun matematik öğretim programlarına entegre edilmesi sürecinin başarılı olması için fraktalların öğretimine yönelik matematik öğretim programlarında ve ders kitaplarında yapılan çalışmaların değerlendirilmesi ve eksikliklerinin belirlenmesi gereklidir. Bu çalışmanın amacı, ilköğretim 8. sınıf matematik öğretim programı ve ders kitaplarını fraktal geometri konusu kapsamında değerlendirmektir. Bu bağlamda çalışmanın ilk bölümünde fraktalların temel özellikleri tanımlandı. Diğer bölümünde ise 8. sınıf matematik öğretim programında ve ders kitaplarında yer alan fraktal geometri konusuyla ilgili yapılan çalışmalar değerlendirildi ve önerilerde bulunuldu. **Anahtar Sözcükler:** fraktal geometri, fraktalların öğretimi, matematik öğretim programı.

GİRİŞ

Okul matematiğinde yaklaşık 2300 yıldan beridir alışlagelmiş olan Euclid geometrisini kullanmaktayız. Euclid geometrisindeki şekiller belli bir büyüklüğe ve orana sahip, basit cebirsel formüllerle ifade edilebilen insan ürünü nesnelere (Barnsley, 1988; Mandelbrot, 1983). Euclid geometrisinde bir denklemin çözümü için denklemleri sağlayan sayıların kümesi aranır ve bulunan çözüm bir çember, parabol, elips ya da üçgen gibi bir şekille biçimlenir. Bu nesnelere gerçeğin güçlü bir şekilde soyutlaştırılmasından meydana gelmiş ve Platon felsefesine ilham kaynağı olmuştur (Gleick, 2005). Okullarda öğretilen geleneksel geometri idealize edilmiş soyutlamalardan oluşurken, tabiatındaki nesnelere şekilleri çok daha karmaşıktır. Bir ağacın, bulutun, dağın, çiçeğin, eğrelti otunun, brokolinin, ateşin, yıldırımın hep düzensiz, girinti ve çıkıntılardan oluşan karmaşık bir yapısı bulunmaktadır. Geometri eğitiminin genel amacı öğrencinin kendi fiziksel dünyasını, çevresini, evreni açıklamada ve problem çözme sürecinde geometriyi kullanabilmesi şeklinde ifade edilebilir (Baki, 2001). Geometri eğitiminin genel amacı göz önüne alındığında mevcut matematik programlarında okutulan Euclid geometrisi öğrencinin çevresini anlamasına, yaşadığı çevre ile ilişki kurmasına ve doğanın geometrik şeklinin oluşturulmasına yeterince yardım edememektedir (Baki, 2001). Kısacası, evreni sadece tek ve mutlak geometri olan Euclid geometrisiyle modellemeye çalışmak yetersiz kalmaktadır. Evrenin modelini oluşturma ve evreni matematiği kullanarak açıklamaya çalışma tutkusu farklı geometrilerin ortaya çıkmasına neden olmuştur (Tikoo, 1998). Bu geometrilerden biri de fraktal geometridir.

Fraktal geometri matematik eğitiminde son yıllarda yer almaya başlayan matematiğin yeni bir alanıdır. Tarihsel gelişimine bakıldığında ilk fraktal yapıların 1870'li yıllarda diferansiyellenmeyen ancak sürekli eğriler ile boyut arasındaki ilişkiler üzerine yapılan çalışmalar sonucu Weierstrass fonksiyonunun bulunmasıyla başladığı ve 1920 yılında Cantor kümesi, Peano eğrisi, Koch eğrisi ve Sierpinski üçgeninin keşfine kadar sürdüğü görülmektedir. Ancak ortaya çıkan bu sıra dışı yapıların matematiğin birçok konusunu yeniden sorgulatması ve görselleştirilmelerinin güçlüğü nedenleriyle yaklaşık elli yıllık bir dönemde matematikçilerin çok fazla ilgisini çekmediği söylenebilir. Bu nedenle bu dönemde bulunan yapılara birer “canavar” ya da “patolojik vaka” denilmiştir (Peitgen ve diğer., 2004). 1970'li yıllarda Benoit Mandelbrot bilgisayar teknolojisini kullanarak bu sıra dışı yapıları yeniden ele almış ve bu yapılara fraktal adını vermiştir. Fraktal kelimesi “düzensiz, kırıklı, karmaşık” anlamlarına gelen Latince “fractus” kelimesinden gelmektedir (Mandelbrot, 1983). En basit anlamda fraktal geometri doğanın geometrisi olarak tanımlanmaktadır (Lornell ve Westerberg, 1999). Fraktallar üzerine literatürde uzlaşılan genel bir tanım bulunmamaktadır (Debnath, 2006). Mandelbrot (1983) ilk olarak fraktalları “Hausdorff-Besicovitch boyutu topolojik boyutunu geçen kümelere fraktal denir”

¹ Arş. Gör. Dr. Fatih KARAKUŞ, Karadeniz Teknik Üniversitesi, fkarakus58@gmail.com

² Prof. Dr. Adnan BAKİ, Karadeniz Teknik Üniversitesi, abaki@ktu.edu.tr

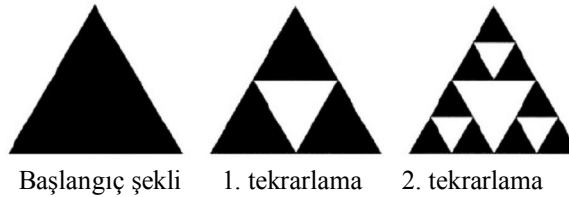
şeklinde tanımlamıştır. Bu tanım birçok fraktal yapıyı dışarıda bırakmasına karşın birçok araştırmacıyı matematiksel olarak fraktalların ne olduğunu keşfetmeye yöneltmiştir. Barnsley (1988) fraktalları “büzulme dönüşümlerinin sabit noktasına bir deterministik fraktal denir” şeklinde tanımlamaktadır. Barnsley’in tanımı göz önüne alındığında tüm fraktallar için değil de sadece deterministik (kurallı) fraktallar için bir tanım yaptığı görülmektedir. Falconer (2003) bir yapıya fraktal dememiz için aşağıdaki şartları göz önüne almamız gerektiğini ifade etmektedir:

- Fraktal şekil mükemmel bir yapıya sahiptir,
- Geleneksel geometri diliyle tanımlanamayacak kadar düzensizdir,
- Fraktal şekil öz-benzerliğe sahiptir. Bu öz-benzerlik çok kesin olabileceği gibi yaklaşıktaki olabilir,
- Genellikle bir fraktalın boyutu kesirlidir,
- Fraktal şekil basit bir tekrarlama kuralıyla elde edilebilir.

Yapılan tanımlar ya fraktalların bir özelliğine odaklanmakta ya da belli özelliklerinin bir birleşimini vermektedir. Bu durumda “Fraktal nedir?” sorusuna verilecek en iyi yanıt bir fraktalın gösterdiği temel özellikleri belirlemektir.

Fraktalların genel olarak “*karmaşıklık (complexity)*”, “*tekrarlama (iteration)*”, “*öz-benzerlik (self-similarity)*” ve “*kesirli boyut (fractal dimension)*” olmak üzere dört temel özelliği olduğu söylenebilir. Karmaşıklık özelliği sıklıkla doğal fraktallara ait olan bir özelliktir. Doğal fraktal şekiller düzensizdir, girinti ve çıkıntılara sahiptir ve karmaşık bir yapıları vardır (Lornell ve Westerberg, 1999). Örneğin, bir kıyı şeridi ile Euclid geometrisinde tanımlı bir yay karşılaştırıldığında bu durum daha açık olarak görülür.

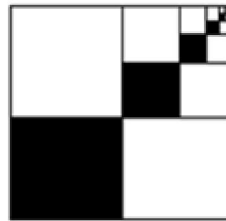
Fraktal nesnelere Euclid nesnelere farklı olarak cebirsel formüller yerine tekrarlama kuralları sonucu oluşurlar. Tekrarlama, bir adımdaki sonucun diğer adımın başlangıcı olduğu devamlı bir yinleme süreci (Peitgen ve diğer., 1992, Kelley, 1999) olarak tanımlanmaktadır. Tekrarlama sürecinde elde edilen her sonuç bir sonraki tekrarlama işlemi için yeni bir başlangıç olmaktadır. Örneğin fonksiyonların kendileriyle bileşmeleri bu tür bir tekrarlama döngüsünü göstermektedir (Peitgen ve diğer., 2004). Sierpinski üçgeni bir eşkenar üçgenin kenarlarının orta noktalarının birleştirilerek oluşan 4 küçük üçgenden ortadakinin çıkarılması sonucu oluşur. Bu tekrarlama kuralına göre aşağıda Sierpinski üçgeni fraktalının ilk iki tekrarlama sonucu oluşan şekli görülmektedir (Şekil 1)



Şekil 1. Sierpinski üçgeni fraktalının ilk iki tekrarlama sonucu oluşan şekli.

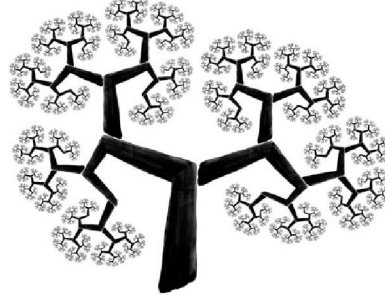
Öz-benzerlik ise bir şeklin tamamının şeklin içindeki küçük bir parçasına benzemesi ve bu küçük parçanın da kendi içinde şeklin tamamına benzer bir başka parça içermesi ve benzeri durumun devam etmesi olarak tanımlanır (Kelley, 1999). Üstün (1999) ve Peitgen ve diğer. (2004) genel olarak üç tür öz-benzerlikten söz edilebileceğini:

- Eğer şeklin sadece bir noktası etrafında öz-benzerlik kurulabiliyorsa buna *noktasal öz-benzerlik* (Şekil 2),



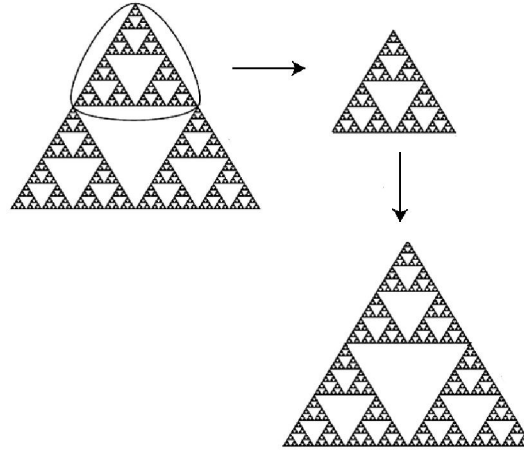
Şekil 2. Noktasal öz-benzer bir şekil

- Eğer şeklin her parçası değil de, belli parçaları üzerinde öz-benzerlik kurulabiliyorsa buna *yaklaşık öz-benzerlik* (Şekil 3),



Şekil 3. Yaklaşık öz-benzer bir ağaç

- Eğer şeklin her parçası hatta her noktası ana şeklin benzeri ise buna *tam öz-benzerlik* (Şekil 4) denir



Şekil 4. Tamamen öz-benzer Sierpinski üçgeni

şeklinde ifade etmektedir. Öz-benzerlik özelliği sayesinde bir fraktala ne kadar yaklaşırsak yaklaşalım her defasında aynı şekli görürüz. Bu durum aynı zamanda fraktal yapıların Euclid şekillerinden farklı olarak belli bir büyüklüklerinin olmadığı, yani ölçek değişmezliklerinin (scale-invariance) olduğunu göstermektedir.

Euclid geometrisine göre sezgisel olarak noktanın 0-boyutlu, doğrunun 1-boyutlu, düzlemin 2-boyutlu ve küpün ise 3-boyutlu olduğu ifade edilir. Euclid geometrisinde boyutlar pozitif tam sayılarla ifade edilirler. Oysa fraktal boyut alışlagelmiş boyut kavramından oldukça farklıdır. Bu boyut başka türlü açıkça tanımlanamayan nitelikleri ölçmenin bir yoludur; bunlar, bir nesnedeki pütürlülük veya kırıklık ya da düzensizlik derecesi gibi niteliklerdir (Gleick, 2005). Fraktal nesnelerin boyutları genellikle kesirlidir. Örneğin Sierpinski üçgeninin fraktal boyutu **1,585** ve Koch eğrisinin fraktal boyutu ise **1,262** dir.

Son yıllarda resim, astronomi, biyoloji, kimya, fizik, bilgisayar, ekonomi, mühendislik, jeoloji ve genetik gibi birçok farklı alanda fraktal geometri yaygın olarak kullanılmaktadır. Fraktalların birçok alanda yoğun olarak kullanılmaya başlanması onların okul matematiği içerisinde öğrenilmesi ve öğretilmesini de zorunlu hale getirmektedir. Bunun yanında fraktal geometrinin ilköğretim seviyesinde sayı dizileri, simetri, oran-orantı, ölçme ve kesirler, ortaöğretim seviyesinde ise logaritma, bileşke fonksiyon, Pascal üçgeni, aritmetik ve geometrik diziler ile karmaşık sayılar gibi birçok geleneksel matematik konusuyla yakın ilişki içerisinde olması ve öğrencilerin matematik ve doğa ile matematik ve diğer disiplinler arasında ilişki kurmalarına yardımcı olması nedenleriyle mevcut matematik öğretim programlarına entegre edilmesi yapılan birçok çalışmada belirtilmektedir (Goldenberg, 1991; Lornell ve Westerberg, 1999; Vacc, 1999; Fraboni ve Moller, 2008). NCTM 1989 yılındaki raporunda

öğrencilerin evreni daha iyi tanıyabilmeleri ve ilişkilendirebilmeleri için Euclid dışı geometrilerle çalışmaları önerilmektedir. Ayrıca NCTM 1991-1993 yılları arasında yayımladığı ek raporlarda geleneksel matematik konuları yanında her seviyeden öğrencinin matematiğe olan ilgi ve ihtiyaçlarını artıracak, matematiğe karşı olumlu tutum geliştirmesini sağlayacak, matematik ile doğa arasında ilişki kuracak ve bu ilişkide teknolojiyi kullanmaya imkân verecek yeni matematik konuları üzerinde de durulmuştur. Önerilen konulardan biri de fraktal geometridir.

Fraktalların bu özelliklerini ve Euclid geometrisinden ayrılan yönlerini dikkate aldığımızda fraktal geometri ve Euclid geometrisi için aşağıdaki gibi bir ayırım yapabiliriz:

Tablo 1: Fraktal Geometri ve Euclid Geometrisinin Farklılıkları

Euclid geometrisi	Fraktal geometri
2300 yıldan fazladır kullanılmakta	40 yıldır etkin olarak bilinmektedir
Belli bir büyüklükleri ve oranları vardır	Belli bir büyüklük ve oranları yoktur
İnsan yapımıdır	İnsan yapımı olanların yanında doğada da bulunurlar
Cebirsel formüllerle tanımlanırlar	Tekrarlama kuralları sonucu oluşurlar
Sonlu yapıları vardır	Doğada bulunanların haricindekiler sonsuz yapıya sahiptirler
Şekilleri düzgündür	Euclid şekilleri kullanılarak oluşturulanlar genellikle düzgün ve kurallı bir yapıya sahip olmasına karşın doğada bulunanlar sıklıkla düzensiz ve karmaşık bir yapıya sahiptirler
Tam sayılı boyutları vardır	Boyutları genelde kesirlidir
Öz-benzerlik özellikleri yoktur	Öz-benzerdirler

Fraktal geometri kavramlarının hem ilköğretim hem de ortaöğretim seviyesinde mevcut matematik öğretim programlarına eklenmesi çalışmaları 1990'lı yıllarda başlamıştır. Ülkemizde ise 2005 yılında matematik öğretim programlarında yapılan değişiklikler kapsamında fraktal geometri kavramları ilk olarak ilköğretim 8. sınıf matematik öğretim programına eklenmiştir. 2008 yılından itibaren ise ilköğretim 8. sınıfta fraktalların öğretimine başlanmıştır. Literatürde fraktalların öğretimine yönelik çalışmalar incelendiğinde bunların sıklıkla fraktalların öğretiminde kullanılacak etkinlikleri geliştirmeye yönelik olduğu görülmektedir. Örneğin Thomas (1989) çalışmasında Logo programını kullanarak fraktal şekilleri oluşturmakta ve fraktalların iki temel özelliği öz-benzerlik ve fraktal boyuta yönelik etkinliklere yer vermektedir. Benzer şekilde Lornell ve Westerberg (1999) çalışmalarında 9-12. sınıf seviyesi için derslerinde kullandıkları ve fraktalların temel özellikleri olan karmaşıklık, tekrarlar ve öz-benzerlik konularının öğretimine yönelik geliştirdikleri etkinlikleri tanıtmaktadırlar. Naylor (1999) ise çalışmasında fraktal yapıları oluşturma, öz-benzerlik ve tekrarlar özelliklerini inceleme ve fraktalların çevresi ve alanını hesaplamaya yönelik etkinlik örneklerine yer vermiştir. Adams ve Aslan-Tutak (2006) ise 5-7. sınıf seviyesine yönelik hazırladığı çalışma yapraklarında Sierpinski üçgenini oluşturmakta ve içerisindeki örüntüleri belirlemektedir. Fraboni ve Moller (2008) çalışmalarında fraktalları kısaca tanıtmakta ve Euclid geometrisiyle ayrılan yönlerini açıklamaktadır. Bunun yanında Sierpinski üçgeninin çevresi ve alanını hesaplamaya yönelik bir etkinliğe yer vermektedirler. Buna karşın fraktalların öğretim programlarına entegrasyonu sürecinde öğretim programlarında ve ders kitaplarında yapılan çalışmaları değerlendirmeye yönelik bir çalışmaya hem yurt içinde hem de yurt dışında henüz rastlanmamaktadır. Okul matematiğine entegre edilmeye başlanan fraktal geometri konularının öğretimine yönelik hazırlanan programın ve ders kitaplarının yeterliliklerinin belirlenmesi bu yeni konunun ileriki dönemlerde daha etkili olarak öğretiminin gerçekleşmesine bir katkı sağlayacaktır. Bu nedenle fraktallar konusunun matematik öğretim programlarına başarılı bir şekilde entegrasyonunun sağlanması için öğretim programlarında ve ders kitaplarında yapılan çalışmaların değerlendirilmesi gerekmektedir. Bu bağlamda bu çalışmanın amacı, ülkemizde 2008 yılında itibaren öğretimi gerçekleştirilen fraktallar konusu kapsamında ilköğretim 8. sınıf matematik öğretim programı ve ders kitaplarını değerlendirmektir. Bu amaca ulaşmak için aşağıdaki alt problemlere yanıt aranacaktır.

- İlköğretim 8. sınıf matematik öğretim programında yer verilen fraktallar konusuna yönelik öğretim programında yapılan çalışmalar ve belirlenen eksiklikler nelerdir?

- Fraktalların öğretimi için hazırlanan ders kitaplarında yapılan çalışmalar ve belirlenen eksiklikler nelerdir?

YÖNTEM

Bu çalışmada asıl amaç incelenen durumu etraflıca tanımlamak ve açıklamak olduğundan betimsel yaklaşım kullanılmıştır. Araştırmada doküman incelemesi yoluyla veriler toplanmıştır. Doküman incelemesinde ülkemizin çeşitli bölgelerinde okutulan ve rastgele belirlenen 3 farklı 8. sınıf ilköğretim matematik ders kitabı, çalışma kitabı ve öğretmen kılavuzu ile 8. sınıf matematik öğretim programı kullanılmıştır. İncelenen ders kitaplarının, öğretmen kılavuzlarının ve çalışma kitaplarının bilimsel içerik açısından uygunluğu değerlendirilmiştir. İçeriğin değerlendirilmesinde fraktalların temel özellikleri olan karmaşıklık, tekrarlı ve öz-benzerlik kavramları göz önüne alınmıştır. Bu bağlamda;

- Ders kitaplarında fraktalların öğretimine yönelik verilen içerik nasıldır?
- Ders kitapları fraktalların hangi özelliklerine yer vermekte ve bu özelliklerin ne kadarını yansıtmaktadır?
- Fraktal kavramına yönelik verilen tanım, açıklama ve örnekler uygun mudur?
- Ders kitaplarında verilen fraktal şekilleri ve çizimler yeterli ve uygun mudur?

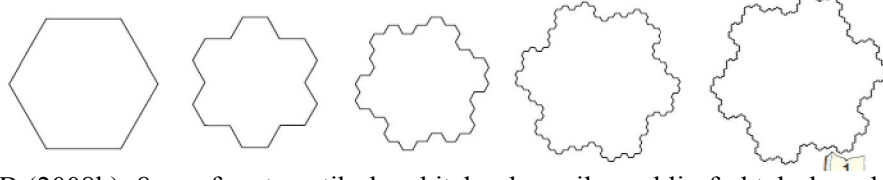
sorularına yapılan analizle cevap aranmaya çalışılmıştır. Ders kitapları için yapılan işlem 8. sınıf matematik öğretim programı için de yapılmıştır. Elde edilen nitel veriler örnek durumlarla birlikte betimsel olarak sunulmuştur.

BULGULAR

Ülkemizde 2005 yılında matematik öğretim programlarında yapılan değişiklikler kapsamında fraktal geometri kavramları ilk olarak ilköğretim 8. sınıf matematik öğretim programına eklenmiştir. 8. sınıf matematik öğretim programında fraktal geometri kavramı örüntü ve süslemeler alt öğrenme alanı içerisinde yer almaktadır. Programda bu konunun öğretim programına eklenmesinin gerekçesi *“matematiğin “örüntülerin bilimi” olduğu görüşünün yanı sıra, kavramların ve nesnelerin kendi için (immanent) doğalarıyla değil, onları içeren yapılarıyla (örüntülerle) ilgilendiği yaklaşımı göz önünde tutulmuştur. Bu yüzden örüntü alt öğrenme alanı, ayrıntılı olarak ele alınmış ve özel birer örüntü olan fraktallara yer verilmiştir. Bu yaklaşımda söz gelimi; 13’ün bir asal sayı olmasının, sayının kendi içsel özelliğinden değil, doğal sayılar içindeki yeri nedeniyle belirlendiği ileri sürülür. Bunun gibi “bir doğrunun eğimi”, seçilen yatay eksene/doğruya göre değiştiğinden bu doğrunun yaradılıştan gelen bir içsel özelliği değildir.”* şeklinde ifade edilmektedir (MEB, 2008a). Dikkat edilirse fraktalların öğretim programına katılma gerekçesi fraktallar konusunu kapsayacak şekilde ele alınmamıştır. Bu durum matematik öğretim programlarına fraktallar gibi yeni bir konunun niçin konulduğu sorusunun cevabının eksik bırakıldığını göstermektedir.

8. sınıf matematik öğretim programında fraktalların öğretimine yönelik *“Doğru, çokgen ve çember modellerinden örüntüler inşa eder, çizer ve bu örüntülerden fraktal olanları belirler.”* şeklinde bir kazanıma yer verilmiştir (MEB, 2008a). Kazanım sadece Euclid geometrisinin şekillerini kullanarak verilen örüntülerin fraktal olup olmadığına öğrencinin karar vermesine yönelik hazırlanmıştır. Ders kitapları incelendiğinde fraktalın tanımı *“ bir şeklin orantılı olarak küçültülmüş ya da büyütülmüşleri ile inşa edilen örüntüler”* şeklinde ifade edilmektedir (Aydın ve Beşer, 2008; Cinkol, 2010; MEB, 2008b). Tanım örtük bir şekilde fraktalların önemli özelliklerinden biri olan öz-benzerliği vurgulamaktadır. Buna karşın fraktalların diğer özellikleri olan tekrarlı ve sonsuzluğa değinilmemektedir. Bu durum öğrencinin verilen şeklin fraktal olup olmadığına karar vermesini güçleştirebilir. Örneğin, ders kitaplarında yer alan fraktal tanımı MEB (2008b) ders kitabı 16. sayfada yer alan 6. uygulama sorusunda verilen şeklin bir fraktal olduğunun belirlenmesinde yetersiz kalmaktadır (Şekil 5).

6) Aşağıdaki örüntünün fraktal olup olmadığını belirleyiniz.



Şekil 5. MEB (2008b), 8. sınıf matematik ders kitabında verilen şeklin fraktal olup olmadığına yönelik soru

Ders kitabında yer alan tanım şeklin orantılı olarak küçültülmüş ya da büyütülmüşlerini göz önüne almayı vurgulamaktadır. Ancak bu fraktal şeklin oluşumunda öğrencilerin altıgenin orantılı olarak küçültülmüşlerini görmeleri oldukça zordur. Buna karşın fraktal şeklin oluşumunu sağlayan tekrarlama kuralının buldurulması bu güçlüğün giderilmesini sağlayabilir. Çünkü başlangıçtaki altıgenin her bir kenarına 1/3 oranında küçülen altıgenlerin sadece üst kısımlarının eklenmesi sonucunda fraktal şekil oluşturulmuştur. Benzer şekilde Cinkol'un (2010) öğretmen kılavuzu 201. sayfada yer alan 1. uygulamasında verilen örüntünün fraktal olup olmadığına karar vermede tanımın yine yetersiz olduğu görülmektedir (Şekil 6).



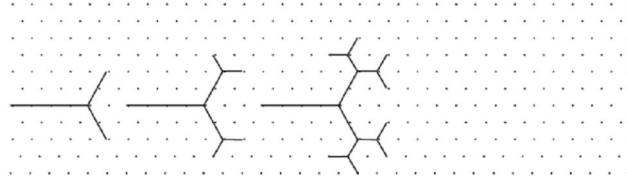
Şekil 6. Cinkol (2010), 8. sınıf matematik ders kitabında verilen şeklin fraktal olup olmadığına yönelik soru

Ders kitabında ve çalışma kitabında yer verilen etkinlikler fraktalın ne olduğunu ve sahip olduğu özellikleri keşfetmekten ziyade daha çok verilen geometrik bir örüntüyü ifade etme ya da bir sonraki adımını çizme şeklindedir. Bunun yanında ders ve çalışma kitaplarında fraktal ve fraktal olmayan şekilleri karşılaştıran etkinlik ya da örneklere çok fazla rastlanmamıştır. Bu durum öğrencilerin verilen bir örüntünün fraktal olup olmadığını belirlenmesini güçleştirecektir. Ders ve çalışma kitaplarında klasik fraktallar olan Koch kartanesi, ve Sierpinski üçgeni fraktallarına yer verilmesine karşın bu fraktal şekillerin isimlerine değinilmediği ve bu şekilleri öğrencilerin kendilerinin oluşturabileceği etkinliklere çok fazla yer verilmediği belirlenmiştir.

8. sınıf matematik ders kitapları incelendiğinde daha çok fraktalların birkaç adımdaki şekillerinin çizilmesine yönelik etkinliklere yer verildiği görülmektedir. Bu bağlamda sıklıkla çizim etkinliklerini kullanarak fraktallar konusuna giriş yapılmaya çalışılmıştır. Ancak, fraktalların sahip oldukları matematiksel alt yapıya öğretim programında değinilmemesi, onun niçin örüntü ve süslemeler alt öğrenme alanı içerisine konulduğu sorusunu akla getirmektedir. Çünkü örüntüler öğrencilerin matematiğin düzenli yapısını algılamaları ve matematiksel genellemeler yapabilmeleri için önemli birer araçtır (Olkun ve Uçar, 2007). Örneğin (MEB, 2008b) ders kitabında yer verilen "Devam Eden Kareler" etkinliğinde bir fraktal şekil oluşturulmasına karşın bu şeklin oluşum aşamasında boyanan her bir karenin bir kenar uzunluğu, her bir adımda boyanan kare sayısı ve bu boyalı karelerin alanlarındaki değişimi belirlemeye yönelik sorulara yer verilmemiştir. Oysa bir fraktal şekil oluşturulurken oluşan kenar sayısında, kenar uzunluğunda, köşe sayısında vb. değişimin belirlenmesi hem öğrencilerin mevcut matematik bilgilerini farklı yollar kullanarak yeniden keşfetmelerine hem de fraktalların öz-benzerlik ve tekrarlama özelliklerini daha iyi anlamalarına yardımcı olabilir. Ayrıca bu tür etkinlikler öğrencilerin yeni ve farklı durumlarla karşılaşarak matematiksel bilgilerinin doğruluğunu sınama fırsatı elde etmelerini sağlayabilir. Bunun yanında bu tür etkinlikler öğrencilerin fraktalları matematikle ilişkili olmayan sadece güzel ve ilginç şekiller bütünü şeklinde bir algı oluşturmalarına engel olabilir.

Ders kitabı ve çalışma kitaplarında yer alan bazı fraktal yapılar yanlış şekilde oluşturulmaktadır. Örneğin MEB (2008b) ders kitabı 16. sayfada yer alan 1. uygulamada (Şekil 5)

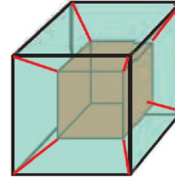
① Aşağıdaki fraktal örneğini bir adım daha devam ettiriniz.



Şekil 5. İlköğretim 8. sınıf ders kitabındaki fraktal ağaç oluşum adımları

oluşan fraktal ağaçta 2. ve 3. tekrarlama adımlarında oluşan dal uzunlukları yanlış şekilde gösterilmektedir. Dikkat edilirse dal uzunlukları bir önceki adıma göre hep yarısı oranında küçülmektedir. Oysa verilen şekilde 2. ve 3. adımda dal uzunlukları değişmemektedir. Yine MEB (2008b) öğrenci çalışma kitabı 10. sayfada yer alan fraktal modeli fraktalların temel özelliklerinden öz-benzerlik ve tekrarlama yansıtmamaktadır (Şekil 6).

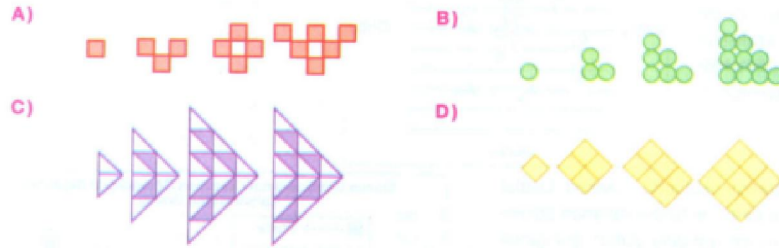
⑦ Yanda küplerle oluşturulmuş bir fraktal modeli verilmiştir. Bu modele göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.
a) Modelde boyutları birbirinden farklı olan kaç tane küp vardır?
b) Bu küplerden birini seçerek temel elemanlarını gösteriniz.



Şekil 6. MEB (2008b) ilköğretim 8. sınıf matematik ders kitabındaki fraktal model örneği

Benzer şekilde Aydın ve Beşer (2008) öğrenci çalışma kitabı 2. sayfada yer alan soruda verilen şekillerden hangisinin bir fraktal olduğu sorulmaktadır (Şekil 7). Ancak soruda verilen şekillerden hiçbiri fraktal değildir.

③ Aşağıdaki örüntülerden hangisi fraktaldır?



Şekil 7. Aydın ve Beşer (2008) ilköğretim 8. sınıf öğrenci çalışma kitabındaki soru

Buna karşın 2009 yılında yapılan 8. sınıf SBS sınavında aşağıda sorulan soru öğrencilerin hem fraktalların öz-benzerlik ve tekrarlama kurallarını kullanarak oluşan örüntüyü bulmalarına hem de örüntü içerisindeki matematiksel ilişkileri keşfetmelerine yöneliktir (Şekil 8).



Yukarıdaki şekilde oluşturulan fraktal modelinin 1. adımındaki boyalı bölgenin alanı 1 cm^2 dir. 10. adımda oluşan en küçük alana sahip karesel bölgenin bir kenarının uzunluğu kaç santimetredir?

- A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{9^2}$ C) $\frac{1}{2^9}$ D) $\frac{1}{2^{10}}$

Şekil 8. SBS sınav sorusu

Bu durum hazırlanan ders kitapları ve öğretim programı ile SBS sınavının içeriğinin birbirine tam olarak uyuşmadığını da göstermektedir.

İncelenen MEB (2008b) ve Cinkol (2010) ders kitaplarının giriş bölümünde fraktallar doğanın geometrisi olarak tanıtılmaktadır. Ancak ders kitaplarında verilen fraktal tanımı doğal fraktalların belirlenmesinde yeterli olmamaktadır. Örneğin Cinkol (2010) matematik ders kitabının 232. sayfasında bir dikkat çekme etkinliği olarak verilen açıklamada fraktalların öz-benzerlik özelliği ve sonsuzluğu ifade edilmektedir (Şekil 8). Ancak bu açıklama doğal fraktallar için tam olarak geçerli değildir. Doğal fraktallar öz-benzerlik ve sonsuzluk özelliklerini sonlu adımlar için yaklaşık olarak yansıtmaktadırlar.

Kendi kendini tekrar ederek sonsuza kadar küçülen şekillerde cisim oluşturan parçalar ya da bileşenler cismin tamamını oluşturur. Düzensiz ayrıntılar ya da desenler giderek küçülen ölçeklerde yinelenir ve tümüyle soyut nesnelere sonsuza kadar sürebilir. Tam tersine cismin her bir parçası büyütüldüğünde cisim yine bütününe benzer. Doğada bu olaya kar tanesi ya da eğreltiotu gibi bazı bitkilerin yapısını örnek olarak verebiliriz.

• Yanda fotoğrafı verilen kar tanelerini inceleyerek konu hakkındaki düşüncelerinizi açıklayınız.



Şekil 8. Cinkol (2010) matematik ders kitabındaki açıklama

Bunun yanında yeni matematik öğretim programı öğrencinin yaşadığı çevresi ve günlük hayatı matematikle ilişkilendirmesini vurgulamaktadır. İncelenen ders kitaplarından MEB (2008b) 8. sınıf matematik ders kitabında sadece görev alt başlığıyla “doğada yer alan fraktal örneklerini bulup sınıfta sergileyiniz” ifadesi yer almakta, Cinkol (2010) ders kitabında sadece eğrelti otu ve kartanesi fraktallarının şekillerine yer verilmekte, Aydın ve Beşer’in (2008) ders kitabında ise doğal fraktallara hiç yer verilmemektedir. Oysa eğrelti otları, nehir yatakları, ağaçlar vb. gibi Euclid geometrisinin elemanlarıyla kolayca tanımlanamayan birçok doğal nesne fraktal geometri ile kolayca tanımlanabilmektedir (Şekil 9). Fraktallar bu ilişkilendirmeyi yapabilecek önemli konulardan biri olmasına karşın öğretim programında buna yer verilmemesi önemli bir eksikliktir.



Şekil 9. Doğal fraktal örnekleri

İlköğretim 8. sınıf matematik öğretim programında fraktallar daha çok çizme-boyama etkinlikleri şeklinde oluşturulmaktadır. Buna karşın kesme, yapıştırma kullanarak 2 ve 3 boyutlu fraktal modelleri oluşturmaya ve bilgisayar destekli etkinliklere ise rastlanmamaktadır. 2 ve 3 boyutlu somut modellerin kullanılması ve öğrencilerin bu modelleri kendilerinin oluşturmaları fraktalın ne olduğunu ve nasıl oluştuğunu daha iyi anlamlarına yardımcı olabilir. Bunun yanında bilgisayar destekli olarak ise öğretmen kılavuzunda “örüntü ve süslemeler çeşitli geometri yazılımlarıyla da yaptırılabilir” şeklinde bir uyarı yer almasına karşın herhangi bir örnek bilgisayar destekli etkinliğe rastlanmamaktadır. Oysa fraktallar sonsuz yapıya sahip olan nesnelere ki bu sonsuzluk bilgisayar programlarının kullanılmasıyla öğrencilere kazandırılabilir.

TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada fraktalın ne olduğu ve fraktalların mevcut öğretim programlarına entegrasyonunda yapılan çalışmalar ve belirlenen eksiklikler ortaya konulmaya çalışılmıştır. Yapılan çalışmalar incelendiğinde matematik öğretim programlarında ve ders kitaplarının içeriğinde eksikliklerin bulunduğu belirlenmiştir.

- Hazırlanan 8. sınıf matematik öğretim programında fraktalların matematik öğretim programına katılma nedenleri tam olarak açıklanmadığı sonucu elde edilmiştir.

8. sınıf matematik öğretim programına fraktallar bir kazanımla katılmasına karşın niçin bu konunun programa katıldığı açıklanmamaktadır. Bunun yerine özel bir örüntü olmaları nedeniyle programda yer verildiği belirtilmektedir. Oysa fraktal geometrinin ilköğretim seviyesinde sayı dizileri, simetri, oran-orantı, ölçme ve kesirler, ortaöğretim seviyesinde ise logaritma, bileşke fonksiyon, Pascal üçgeni, aritmetik ve geometrik diziler ile karmaşık sayılar gibi birçok geleneksel matematik konusuyla yakın ilişki içerisinde olması, öğrencilerin matematik ve doğa ile matematik ve diğer disiplinler arasında ilişki kurmalarına, okul matematiğinin analitik olmayan yollarla keşfedilmesine ve matematik alanındaki güncel gelişmeleri görmelerine yardımcı olması nedenleriyle mevcut matematik öğretim programlarına entegre edilmesi yapılan birçok çalışmada belirtilmektedir (Goldenberg, 1991; Lornell ve Westerberg, 1999; Vacc, 1999; Fraboni ve Moller, 2008).

- 8. sınıf matematik ders kitaplarında yer verilen fraktal tanımında sadece fraktalın bir özelliği olan öz-benzerliğe odaklanılmaktadır.

8. sınıf matematik ders kitaplarında verilen fraktal tanımında öz-benzerlik özelliği üstü kapalı olarak vurgulanmaktadır. Ancak fraktalın diğer bir önemli özelliği olan tekrarlama kavramına değinilmemektedir. Bunun yanında fraktal örüntülerin sonsuz yapılarına ise yer verilmemektedir. Bu durum verilen bir nesnenin fraktal olup olmadığına karar vermeyi güçleştirebilir.

- Öğretmen kılavuzlarında fraktallar ve özelliklerine yönelik açıklamalara yer verilmediği belirlenmiştir.

Fraktallar konusu hem matematik hem de matematik eğitiminde oldukça yeni bir konudur. Öğretmenlerin büyük bir çoğunluğunun bu konuya ve öğretimine yönelik bir bilgileri bulunmamaktadır (Karakuş ve diğer, 2008). Bu nedenle hazırlanan öğretmen kılavuzlarında fraktalların temel özelliklerine yönelik açıklamalara yer verilmesi önem taşımaktadır.

- 8. sınıf matematik ders kitaplarında fraktalın ne olduğunu anlamak yerine fraktal örüntüleri çizme etkinliklerine daha fazla yer verildiği tespit edilmiştir.

İncelenen 8. sınıf matematik ders kitaplarında fraktalın ne olduğu anlamak yerine verilen bir örüntüyü ifade etme ya da bir sonraki adımını çizme etkinliklerine daha fazla yer verildiği ve fraktal olan ve olmayan nesnelere yönelik örneklerle rastlanmadığı belirlenmiştir. Bu durum hem öğrencilerin hem de öğretmenlerin verilen şekillerden fraktal olanlar ile olmayanları ve hangi örüntülerin fraktal olduklarına karar vermelerini güçleştirecektir.

- 8. sınıf matematik ders kitaplarında ünlü fraktal örneklerine yer verilmediği tespit edilmiştir.

Derslerde ünlü matematikçilerin hayat hikâyelerine yer vermek öğrencilerin matematiğin tarihsel gelişimiyle bilimin tarihsel gelişimi arasında bir ilişki kurmasını sağlayabilir (Barry, 2000). Sierpinski üçgeni, Koch kartanesi, Cantor kümesi, Peano eğrisi gibi ünlü fraktallara 8. sınıf ders kitabında yer vermek öğrencilerin fraktalların tarihsel gelişimleri hakkında bilgi edinmelerine ve bu yapıları öğrencilerin kendilerinin de onları oluşturan matematikçiler gibi oluşturmalarına ve benzer güçlükleri yaşamalarına yardımcı olabilir.

- 8. sınıf ders kitaplarında fraktalların matematiksel alt yapılarına yeterince yer verilmediği belirlenmiştir.

8. sınıf matematik ders kitaplarında sadece fraktal şekilleri birkaç adım için çizmeye odaklanılmış ve oluşan örüntüler üzerine matematiksel işlemlere yer verilmemiştir. Buna karşın 2009 yılında yapılan SBS sınavında ise hem örüntü oluşturmaya hem de oluşan örüntü içerisindeki matematiği keşfetmeye yönelik bir soruya yer verilmiştir. Bu haliyle SBS sınavı ile ders kitabının içeriğinin tam olarak uyumunda söylenemez.

- 8. sınıf matematik ders kitaplarında yer verilen fraktal tanımı doğal fraktalların belirlenmesinde yetersiz kalmaktadır.

Ders kitaplarında verilen fraktal tanımı Euclid şekillerini kullanarak oluşturulan soyut fraktal şekilleri belirlemeye yöneliktir. Bu bağlamda doğal fraktallar sadece sonlu adımlarda öz-benzerlik özelliğine sahiptirler ki bu öz-benzerlik yaklaşık olarak mevcuttur. Bu nedenle doğal fraktal örnekleri verilirken bu durum göz önüne alınmalıdır. Özellikle öz-benzerlik özelliğini daha çok yansıtan eğrelti otu, brokoli, karnabahar, akciğerler vb. gibi fraktallara ders kitaplarında yer verilmesi önerilebilir.

- 8. sınıf matematik öğretimi programında fraktal geometri etkinliklerinde somut modellere ve bilgisayar destekli etkinliklere yer verilmediği tespit edilmiştir.

2 ve 3 boyutlu somut modellerin kullanılması ve öğrencilerin bu modelleri kendilerinin oluşturmaları fraktalın ne olduğunu ve nasıl oluştuğunu daha iyi anlamlarına yardımcı olabilir. Coes (1993) çalışmasında fraktalların öğretiminde somut materyaller kullanılmasının fraktalların temel özelliklerinden öz-benzerliğin daha anlamlı olarak öğrenilmesini sağlayacağını ifade etmektedir. Yenilenen matematik öğretim programlarında bilgisayar destekli etkinliklere yer verilmesi önemle vurgulanmaktadır. Bunun yanında literatürde fraktalların öğretimine yönelik yapılan çalışmalarda bilgisayarın önemi belirtilmektedir (Thomas, 1989; Barton, 1990; Devaney, 2004). Buna karşın hazırlanan ders kitaplarında ve matematik öğretim programlarında fraktalların öğretiminde bilgisayar destekli etkinliklere yer verilmemektedir.

- Ders kitapları ve çalışma kitaplarında bazı hatalı fraktal çizimleri, eksik ya da yanlış açıklamalar ve yanlış alıştırma soruları belirlenmiştir.

Ders kitapları ve çalışma kitaplarında yer alan bu tür eksiklik ve hatalar öğretmen ve öğrencilerin hatalı ya da eksik fraktal anlamları geliştirmelerine neden olabilir.

ÖNERİLER

Yapılan bu çalışma sonucunda ders kitaplarında, öğretmen kılavuzlarında ve çalışma kitaplarında fraktalların temel özellikleri kapsamında çeşitli eksiklikler belirlenmiştir. Bu eksiklikler kapsamında ders kitaplarında yer verilen fraktal tanımı, temel fraktal özelliklerini yansıtacak şekilde yeniden düzenlenebilir. Bunun yanında ders kitaplarında fraktal olan ve olmayan şekillere daha fazla yer verilmeli ve fraktalların günlük hayatla ilişkilerini yansıtacak etkinlikler eklenmelidir. Ayrıca ders kitaplarında fraktal şekillerin oluşturulmasında çizim etkinliklerinin yanında somut modeller ve bilgisayar programlarının da kullanılabileceği etkinliklere yer verilebilir.

Fraktal geometri konularının öğretimine ilköğretim seviyesinde başlanmasına karşın öğrencilerin bu konuları nasıl anladıkları, nasıl öğrendikleri ve öğretmenlerin bu konuları nasıl öğrettikleri hakkındaki düşüncelerini belirlemeye yönelik çalışmalara henüz çok fazla rastlanmamaktadır. Bu bağlamda öğrencilerde oluşan fraktal anlamları belirlenerek ders kitapları ve öğretim programının fraktallar kapsamında farklı bir değerlendirilmesi de yapılabilir.

KAYNAKÇA

- Adams, T.L. ve Aslan-Tutak, F. (2006). Serving Up Sierpinski! *Mathematics Teaching in The Middle School*, 11(5), 248-251.
- Aydın, N. ve Beşer, Ş. (2008). *İlköğretim Matematik 8 Ders Kitabı*. Ankara: Aydın Yayıncılık ve Eğitim Hizmetleri LTD. ŞTİ.
- Baki, A. (2001). Bilişim Teknolojisi Işığında Matematik Eğitiminin Değerlendirilmesi. *Milli Eğitim Dergisi*, 149, 26-31
- Barnsley, M. (1988). *Fractals Everywhere*. San Diego, CA: Academic Press.
- Barton, P., S. (1990). Chaos and Fractals, *Mathematics Teacher*, 83 (7) 524-529.
- Barry, D.T. (2000). Mathematics in Search of History. *Mathematics Teacher*, 93 (8), 647-650.
- Cinkol, H. (2010). *İlköğretim 8. Sınıf Matematik Ders Kitabı*. Ankara: Pasifik Yayınları.
- Coes, L. (1993). Building Fractal Models with Manipulatives. *The Mathematics Teacher*, v.86, n.8, 646-651.
- Debnath, L. (2006). A Brief Historical Introduction to Fractals And Fractal Geometry. *International Journal of Mathematical Education In Science And Technology*, vol. 37, n.1, 29-50.

- Devaney, R., L. (2004). Fractal Patterns and Chaos Games. *Mathematics Teacher*, 98(4), 228–233.
- Falconer, K. (2003). *Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications* (2nd Edition). John Wiley & Sons Ltd, England.
- Fraboni, M. & Moller, T. (2008). Fractals in The Classroom. *Mathematics Teacher*, 102, 3, 197.
- Gleick, J. (2005). *Kaos* (Çev. Fikret Üçcan). Tübitak Yayınları,
- Goldenberb, E.P. (1991). Seeing Beauty in Mathematics: Using Fractal Geometry to Build a Spirit of Mathematical Inquiry. In Zimmermann, W.& Cunningham, S. (Eds.) *Visualization In Teaching And Learning Mathematics* (pp. 39-66). Washington, D.C: Mathematical Association of America.
- Karakuş, F., Kösa, T., & Karataş, İ. (2008). Matematik Öğretmeni Adaylarının Fraktal Geometriye Yönelik Görüşleri, 7. Matematik Sempozyumu, 13-15 Kasım 2008, İzmir.
- Kelley, P. (1999). Build a Sierpinski Pyramid. *Mathematics Teacher*, 92(5), 384–386.
- Lornell, R. & Westerberg, J. (1999). Fractals in High School: Exploring a New Geometry. *Mathematics Teacher*, 92(3), 260–269.
- Mandelbrot, B. B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman and Co.
- MEB (2008a). İlköğretim Matematik Dersi 6–8. Sınıflar Öğretim Programı. 07.11.2008 tarihinde <http://ttkb.meb.gov.tr/> adresinden indirilmiştir.
- MEB (2008b). *İlköğretim Matematik 8. Ders Kitabı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Ders Kitapları Dizisi.
- Naylor, M. (1999). Exploring Fractals in The Classroom. *Mathematics Teacher*, 92(4), 360– 366.
- NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Olkun, S. & Uçar, Z.T. (2007). *İlköğretimde Etkinlik Temelli Matematik Öğretimi*. Ankara: Cem Ofset.
- Peitgen, H-O., Jürgens, H., Saupe, D., Maletsky, E., Perciante, T.& Yunker, L. (1992). *Fractals For The Classroom: Strategic Activities Volume One*. NCTM, Springer.
- Peitgen, H-O., Jürgens, H. & Saupe, D. (2004). *Chaos and Fractals New Frontiers of Science Second Edition*. New York: Springer-Verlag.
- Thomas, D. A. (1989). Investigating Fractal Geometry Using LOGO. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*. v8, n3, 25- 31.
- Üstün, C. (1999). *Fraktal Geometri Konusunun Ortaöğretim Programına Uygulanması*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Vacc, N. N. (1999). Exploring Fractal Geometry with Children. *School Science and Mathematics*, v99, n2, 77-83.