Elementary Education Online, 11(4), 1021-1035, 2012.
İlköğretim Online, 11(4), 1021-1035, 2012. [Online]: http://ilkogretim-online.org.tr

Analyzing Problems Posed by 7th Grade Students for Addition Operation with Fractions

Cemalettin IŞIK* Tuğrul KAR**

ABSTRACT. The aim of the present study was to determine the potential difficulties which might be experienced by elementary school 7th grade students related to the problems posed by them on addition operation with fractions. The study was conducted with 210 students studying at seven elementary schools located in Erzurum city center. The Problem Posing Test consisted of five items related to addition operation with fractions was used as the data collection tool. Seven difficulties were determined in the problems posed by the students. The most significant difficulty was observed in posing problems requiring addition of two simple fractions to produce a fraction with integer, while the least significant one was experienced in posing problems requiring addition of two simple fractions to produce a simple fraction.

Key words: Problem posing, fractions, addition operation with fractions.

SUMMARY

Purpose and significance: It is seen in the literature that studies mostly focus on investigating difficulties experienced by elementary school students related to addition operation with fractions through solution of symbolic operations and problems associated with daily life situations. However, comprehensive studies related to difficulties experienced by students in associating addition operation with fractions with daily life situations through problem posing were not seen. Thus, the aim of the present study was to find potential difficulties which might be experienced by elementary school 7th grade students related to problems posed by them on addition operation with fractions.

Methods: The study was conducted with 210 7th grade students studying at seven elementary schools located in Erzurum city center. Problem Posing Test (PPT) consisted of five items related to addition operation with fractions was used as the data collection tool. Students were asked to pose a problem requiring only the given operations to be solved for each item taking place in PPT during a lesson. The answers given to PPT were analyzed by two different researchers. Then, their results were compared and agreement was achieved on classification of difficulties.

Results: Seven difficulties were determined in the problems posed by elementary school's seventh grade students. These were: expressing the added second fraction over the remainder of the whole, failure in establishing part-whole relation, attributing natural number meaning to the result of the operation, confusion about units, attributing natural number meaning to the added fractional numbers, failure in expressing the operation in the question root and failure in attributing meaning to integers in case of fractions including integers. 232 difficulties were experienced in those problems in which two simple fractions were added to produce a simple fraction. 306 difficulties were experienced in those problems in which two simple fractions were added to produce a fraction with an integer. 297 difficulties were experienced in those problems requiring the operation of $2\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\blacksquare$. 281 difficulties were experienced in those problems requiring the operation of $2\frac{1}{3}+3\frac{1}{6}=\blacksquare$. 280 difficulties were experienced in those problems requiring the operation of $3\frac{1}{5}+2=\blacksquare$.

Discussion and Conclusions: It was seen that difficulties were mostly experienced due to failure in establishing part-whole relation, failure in perceiving quantities represented by fractional numbers and carrying habits with natural numbers to fractions. Content of the determined difficulties and high number of difficulties determined in the posed problems indicate that students have conceptual deficiencies in the subject of fractions and addition operation with fractions. In the present study, difficulties experienced in problem posing related to symbolic fraction representations were identified. Furthermore, such types of analyses may be conducted via different problem posing techniques.

* Assist. Prof., Atatürk University, cisik@atauni.edu.tr
** Res. Assist., Atatürk University, tugrulkar@atauni.edu.tr

7. Sınıf Öğrencilerinin Kesirlerde Toplama İşlemine Kurdukları Problemlerin Analizi

Cemalettin IŞIK* Tuğrul KAR**

ABSTRACT. Araştırmada, ilköğretim yedinci sınıf öğrencilerinin kesirlerde toplama işlemine yönelik kurdukları problemlerde karşılaşabilecekleri olası güçlüklerin belirlenmesi amaçlanmıştır. Araştırma, Erzurum merkezdeki yedi ilköğretim okulunun yedinci sınıflarında öğrenim gören 210 öğrenci ile yapılmıştır. Kesirlerde toplama işlemine yönelik beş maddeden oluşan Problem Kurma Testi(PKT) veri toplama aracı olarak kullanılmıştır. Öğrencilerin kurdukları problemlerde; toplanan ikinci kesri bütünün kalanı üzerinden ifade etme, parça-bütün ilişkisini kuramama, işlem sonucuna doğal sayı anlamı yükleme, birim kargaşası, toplanan kesir sayılarına doğal sayı anlamı yükleme, işlemi soru köküne yansıtamama ve tamsayılı kesirlerin tam kısımlarına anlam yükleyememe şeklinde yedi güçlük tespit edilmiştir. En fazla güçlük sonucun tamsayılı kesir olduğu iki basit kesrin toplamına, en az güçlük ise sonucun basit kesir olduğu iki basit kesrin toplamına yönelik problem kurmada görülmüştür.

Key words: Problem kurma, kesirler, kesirlerde toplama işlemi.

GİRİŞ

Kesirler ve kesirlerle işlemlere yönelik kavramsal anlamanın oluşturulması, özellikle cebir gibi ileri düzeydeki konuların öğrenilmesi ve problem çözme becerisinin geliştirilmesinde önemli yere sahiptir. Buna karşın kesirler ve kesirlerle işlemler, öğrenciler için anlaşılması zor matematiksel konuların başında gelir (Charalambous & Pantazi, 2005; Doğan & Yeniterzi 2011; Işık, 2011; Işıksal, 2006; Küçük & Demir, 2009; Misquitta, 2011; Tirosh, 2000; Zembat, 2007). Kesirlerin yazılı formunun karmaşık ve kesir aritmetiğinin birçok kuralının olması, sembolik dili ile anlamı arasındaki ilişkinin kurulamaması (Hasemann, 1981; Mack, 1990,1995), yeterli altyapı oluşturulmadan öğrencilerin hesaplamalara başlatılması (Işıksal, 2006; Mok, Cai & Fung, 2008; Redmond & Utley, 2007; Rule & Hallagan, 2006) ve kavramsal anlamaya yönelik etkinliklere yeterince yer verilmemesi (Pantziara & Philippou, 2011; Redmond, 2009; Sharp & Adams, 2002), bu zorluğun başlıca nedenleri arasında yer almaktadır.

Brueckner (1928), kesirlerde toplama işlemine yönelik 40 farklı örnek durumun olduğunu ve her bir durumun özel güçlüklere yol açtığını belirtmiştir. Kesirlerde toplama işlemine yönelik örnek durumlardan bazıları $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}+\frac{5}{8}$, $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}+\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$ şeklindedir. Birinci durumda kesir toplamı 1'den küçük olup sadeleştirme yapılamazken, ikincisinde toplam 1'den küçük olup sadeleştirme yapılabilmektedir. Üçüncü durumda toplam 1'e eşit olup, sonuç sadeleştirilerek doğal sayıya dönüştürülebilmektedir. Dördüncü durumda sonuç tamsayılı kesir, son durumda ise toplam $\frac{6}{4}$ olup, $1\frac{2}{4}$ şeklinde veya sadeleştirilerek $1\frac{1}{2}$ şeklinde yazılabilmektedir. Brueckner (1928), kesirlerde toplama işlemine yönelik görülen güçlükleri genel olarak; (i) işlem sürecinin doğru şekilde tamamlanamaması, (ii) kesirlerin sadeleştirilmesinde görülen güçlükler, (iii) bileşik kesirle ilgili güçlükler, (iv) hesaplama hataları, (v) yanlış yöntem kullanma, (vi) kısmi işlem, (vii) payda eşitlemedeki güçlükler şeklinde sınıflandırmıştır.

Kerslake (1986), birçok öğrencinin kesirlerde toplama işlemini doğru şekilde yapabilmesine rağmen işlem sürecini açıklayamadıklarını ve işlemsel sürecin, kavramsal sürecin önüne geçtiğini belirtmiştir. Hasemann (1981), 12-15 yaş grubu öğrencilerinin %19'unun $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$

---

* Yrd. Doç. Dr., Atatürk Üniversitesi, cisik@atauni.edu.tr
** Arş. Gör., Atatürk Üniversitesi, tugrulkar@atauni.edu.tr

işlemini doğru yaptığını, buna karşın %35'inin $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$ ve %21'inin $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ şeklinde cevaplar verdiği sonucuna ulaşmıştır. Soylu ve Soylu (2005), beşinci sınıf öğrencilerinin yarısından daha fazlasının pay ve paydayı ayrı ayrı toplayarak cevap verdiklerini tespit etmişlerdir. Benzer şekilde Siegler (2003), $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ işlemi için birçok öğrencinin pay ve paydayı ayrı ayrı toplayarak $\frac{2}{5}$ şeklinde cevaplar verdiğini ve bu tür bir yanılgının geçici olmadığını belirtmiştir. Mack (1995), ilköğretim üç ve dördüncü sınıf öğrencilerine $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ işlemini içeren sözel gerçek yaşam problemleri sunmuş ve bazı öğrencilerin $\frac{2}{16}$ cevabını verdiklerini tespit etmiştir. Araştırmacı öğrencilerin her biri 8 parçaya bölünmüş iki ayrı bütün varmış gibi düşünerek, $\frac{2}{16}$ kesrini iki bütünün 16 parçaya ayrılıp 2 parçasının alınması şeklinde yorumladıklarını belirtmiştir. Amato (2005), pay ve paydanın ayrı ayrı toplanmasının, parça-bütün diyagramlarındaki saymadan da kaynaklanabileceğini ifade etmiştir. Çünkü parça-bütün diyagramlarının kullanımında önce taralı parçaların sayısı, sonra toplam parça sayısı bulunmakta ve birinci sayı ikinci sayının üstüne yazılarak kesir sayısı oluşturulmaktadır. Hasemann (1981) bu tür yanılgıların nedenini, öğrencilerin doğal sayılardaki toplama işlemi alışkanlıklarına, Siegler (2003) herbir kesirin büyüklüğüne yönelik anlayış oluşturamamalarına, Ni ve Zhou (2005) ise doğal sayıların parçalanamaz bütünler olarak algılanmasına bağlamaktadırlar.

Frankenstein (1998), öğrencilerin kelimeleri telaffuz edebildiklerini ancak okuduklarının ne anlama geldiğini açıklayamadıklarını ve kesirlerde toplama işlemini de içeren sözel problemlerde güçlükler yaşadıklarını belirtmiştir. Ahmad ve Latih (2010) sözel problemlerin anlaşılmaması durumunda, öğrencilerin rastgele işlemler yaparak yanıt verdiklerini tespit etmişlerdir. Kocaoğlu ve Yenilmez (2010) beşinci sınıf öğrencilerinin kesir işlemlerini içeren sözel problemleri çözme başarılarının düşük olduğunu, problemlerdeki verilenleri ve istenenleri göz ardı ettiklerini ve işlemlerin sırasının belirlenmesinde güçlükler yaşadıklarını tespit etmişlerdir. Herman ve diğ., (2004) ise ilköğretim öğrencilerinin kesirlerde toplama işlemlerini sembolik temsiller üzerinden açıklayabildiklerini, buna karşın çok az bir kısmının işlemlere yönelik tasvir veya hikayeler oluşturabildiğini belirtmişlerdir. Bu sonuca paralel olarak Birgin ve Gürbüz (2009), ilköğretim ikinci kademe öğrencilerinin kesirlerde toplama işlemine yönelik görsel modeli belirleyebilme başarılarının, sembolik işlemin hesaplanması başarılarına göre daha düşük olduğunu tespit etmişlerdir. Araştırmacılar, öğretim ortamlarında geleneksel öğretim yöntemlerinin kullanılmasını ve işlemsel bilginin ön plana çıkarılmasını bu durumun nedeni olarak belirtmişlerdir. English ve Halford'a (1995) göre kesirlerin anlamsız süreçler bütünü olarak sunulması, sembolik işlemler ile somut anolijiler arasındaki ilişkinin oluşturulamamasına neden olmaktadır. Bulgar (2003), kesirlere yönelik algoritmaların geleneksel yöntemlerle öğretildiğini, algoritmanın iyi bir şekilde yürütülmesi halinde altında yatan anlamların sorgulatılmadığını belirtmiştir. Bu durum öğrencilerde sadece işlemsel yeterliliğin geliştirilmesine neden olmaktadır. Kavramsal bilginin oluşumu için ise kesirlere yönelik terim ve algoritmalar, günlük yaşam durumları ile ilişkilendirilmelidir. İlköğretim 1-5. Sınıflar Matematik Dersi Öğretim Programı'nda (MEB, 2009) doğal sayılar yanında, kesir kavramının da günlük yaşam ile ilişkilendirilerek öğretilmesi gerektiği vurgulanmaktadır. Bu ilişkilendirme öğrencilerin kesirlere yönelik informal bilgileri ile formal öğretim arasındaki bağın kurulmasına da imkan sağlayabilecektir.

Kesirler ve kesirlerle toplama işleminin günlük yaşam durumları ile ilişkilendirilmesinde sözel problemler önemli yere sahiptir (Alacacı, 2009; Van de Walle, 2004). İlköğretim 1-5. Sınıflar Matematik Dersi Öğretim Programı'nda (MEB, 2009: s.278) "kesirlerle toplama ve çıkarma işlemleri gerektiren problemleri çözer ve kurar" kazanımı altında günlük hayatla ilişkili seçilen problemlerin çözdürülmesi ve kurdurulması etkinliklerine yer verilmesinin önemi vurgulanmaktadır. Benzer şekilde İlköğretim 6-8. Sınıflar Matematik Dersi Öğretim Programı'nda (MEB, 2009: s.140) "kesirlerle işlemler yapmayı gerektiren problemleri çözer ve kurar" kazanımı altında öğrencilerden problemlerin çözümünde kullanılan benzer işlemleri gerektiren problemler kurmaları istenmektedir.

Öğrenciler problem kurma yoluyla, deneyimleri ile matematiksel kavram ve işlemleri ilişkilendirebilmekte, matematiksel bir dil geliştirebilmekte, sembolik temsillere anlam yükleyebilmekte ve çözüm için gerekli olan adımlar arasındaki bağlantıları kurabilmektedir (Abu-Elwan, 2002; Akay, 2006; Cai, 2003; Crespo & Sinclair, 2008; English, 1997; Işık, Işık & Kar, 2011; Lowrie, 2002; Toluk-Uçar, 2009). English (1998) öğrencilerin sembolik matematiksel ifadeleri tanımlayabilme ve günlük yaşam durumları ile ilişkilendirebilme becerilerinin, problem kurma etkinlikleri ile değerlendirilip geliştirilebileceğini belirtmiştir. Bunun yanı sıra Dickerson (1999), öğrencilerin kendi problemlerini kurduklarında, problemlerin yapısının altında yatan anlamları ve yaklaşımları fark edebileceklerini, sayı ve kavramlar arasındaki ilişkileri oluşturabileceklerini belirtmiştir.

Toluk-Uçar (2009) sınıf öğretmeni adayları ile yaptığı çalışmada öğretmen adaylarının kesirleri miktar yerine parça sayısı şeklinde düşündüklerini ve kurdukları problemlerin çözümlerinin kesirlerde toplama yerine doğal sayılarda toplama işlemini gerektirdiğini tespit etmiştir. Bir adayın $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=?$ işlemine yönelik kurduğu "Annem bana 3 elmasından birini ve kardeşim de 2 elmasından birini verdi. Toplam kaç elmam oldu?" şeklindeki problemin bu durumu örneklediğini belirtmiştir. Ticha ve Hošpesová (2009) öğretmen adaylarını $\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}$ işlemine yönelik problem kurdurmuş, daha sonra kurulan problemler içerisinden dikkat çekici olduğunu düşündüğü üç problemi adaylara sunarak değerlendirmelerini istemiştir. Araştırmacı öğretmen adaylarının verilen işlemin kavramsal boyutunu göz ardı ettiklerini, gerçek yaşam durumları ile verilen işlemi ilişkilendiremediklerini, bir kısmının da çarpma işlemi yerine toplama işlemini gerektiren problemler kurduklarını tespit etmiştir. Işık (2011) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kesirlerde çarpma ve bölme işlemine yönelik kurdukları problemlerin kavramsal analizi üzerine odaklanmıştır. Araştırma sonuçları öğretmen adaylarının, kesir ve kesir işlemlerinin kavramsal boyutunda güçlükler yaşadıklarını ortaya koymuştur. Ayrıca araştırmacı, problem kurmanın adayların kesir işlemlerine yönelik yaşadıkları güçlükler hakkında daha derin anlayışlar oluşturmaya imkan tanıdığını belirtmiştir.

Alan yazınında ilköğretim öğrencilerinin kesirlerde toplama işlemine yönelik karşılaştıkları güçlüklerin daha çok sembolik işlemlerin veya günlük yaşam durumlarıyla ilişkilendirilmiş problemlerin çözümü üzerinden araştırıldığı görülmektedir. Bunun yanı sıra alan yazınında kesirlerde toplama işlemine yönelik problem kurma üzerine yapılan sınırlı sayıdaki çalışmaların ise öğretmen veya öğretmen adayları ile yürütüldüğü görülmüştür. Alan yazınında ilköğretim ikinci kademe öğrencilerinin kesirlerde toplama işlemine yönelik problem kurmada ne tür güçlükler yaşadıklarını araştıran bir çalışma ile karşılaşılmamıştır. Işık ve Kar (2012), ilköğretim matematik öğretmenlerinin sayılar öğrenme alanı içerisinde en fazla kesirler alt öğrenme alanında problem kurma etkinliklerine yer verdiklerini tespit etmişlerdir. Bunun yanında kesirler alt öğrenme alanında problem kurma etkinliklerine yer veren öğretmenlerin tamamının, problem kurmanın öğrencilerin kavramsal anlamalarına ve sembolik ifadelerle günlük yaşam arasındaki ilişkinin kurulmasına katkı sağladığı yönünde görüşler belirttiklerini de tespit etmişlerdir. İlköğretim 1-5 ve 6-8. Sınıflar Matematik Dersi Öğretim Programı'nda (MEB, 2009) kesirlerde toplama işlemine yönelik problem kurma kazanımlarının varlığı da dikkate alındığında, ilköğretim öğrencilerinin kurdukları problemlerin analizi, öğrencilerin kavramsal düzeydeki olası eksikliklerine yönelik derin anlayışların oluşturulmasına imkan tanıyabilecektir. Ayrıca bu tür bir analiz, öğretmenlerin öğrenci güçlüklerine yönelik farkındalıklarını artırma ve öğretim sürecini planlamalarına da katkı sağlayabilecektir. Bu bağlamda araştırmada, ilköğretim yedinci sınıf öğrencilerinin kesirlerde toplama işlemine yönelik kurdukları problemlerde karşılaşabilecekleri olası güçlüklerin belirlenmesi amaçlanmıştır.

YÖNTEM

Araştırma Deseni: Bu çalışmada nicel ve nitel yaklaşımlar bir arada kullanılmıştır. Mcmillan ve Schumacher'e (2010) göre bazı araştırmalarda nitel veya nicel yaklaşımlar tek başına yeterli olmayabilir. Bu durumlarda nitel ve nicel yaklaşımlar bir arada kullanılabilir. Araştırmada ilköğretim yedinci sınıf öğrencilerinin kesirlerde toplama işlemine yönelik kurdukları problemlerdeki güçlükler, açık-uçlu beş maddeye verilen yanıtların nitel analizleri sonucu belirlenmiştir. PKT'nde yer alan beş maddenin her biri için güçlük kategorilerine ait dağılımlar ise nicel analizler sonucunda oluşturulmuştur.

Katılımcılar: Araştırma, Erzurum merkezdeki yedi ilköğretim okulunun yedinci sınıflarında öğrenim gören 210 öğrenci ile 2011-2012 güz yarıyılında yapılmıştır. Araştırmaya gönüllü olarak katılan öğrencilerin 121'i kız 89'u erkektir. İlköğretim okullarının belirlenmesinde basit seçkisiz örnekleme modeli kullanılmıştır. Araştırma için Erzurum il merkezinde yer alan ilköğretim okulları tespit edilmiş ve kura çekilerek 7 okul belirlenmiştir. Bu 7 ilköğretim okulunda eğer her bir sınıf düzeyinde birden fazla şube varsa, rastgele birer şube seçilmiştir. Uygulamaya katılan öğrenciler, altıncı sınıfta ilköğretim matematik dersi öğretim programındaki "kesirlerle toplama ve çıkarma işlemlerini yapar ve kesirlerle işlemler yapmayı gerektiren problemleri çözer ve kurar" kazanımlarına yönelik öğretim sürecini tamamlamışlardır.

Verilerin Toplaması ve Analizi: Araştırmada, veri toplama aracı olarak kesirlerde toplama işlemine yönelik beş maddeden oluşan Problem Kurma Testi (PKT) kullanılmıştır. PKT'nde iki basit kesrin toplamına yönelik iki maddeye yer verilmiştir. Bu maddelerden birincisinde, kesirlerin toplamı basit kesir, ikincisinde ise tamsayılı kesirdir. Ayrıca PKT'nde tamsayılı kesir ile basit kesrin, iki tamsayılı kesrin ve tamsayılı kesir ile bir doğal sayının toplanmasına yönelik birer maddeye de yer verilmiştir. Böylece farklı kesir sayılarının toplanmasına yönelik problem kurmada yaşanabilecek olası güçlüklerin belirlenmesi amaçlanmıştır. PKT'nde yer alan her bir madde ve özellikleri Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. PKT'nde yer alan maddeler ve özellikleri

Maddeler	Özellikleri
$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\blacksquare$	Toplamın basit kesir olduğu iki basit kesrin toplanması
$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\blacksquare$	Toplamın tamsayılı kesir olduğu iki basit kesrin toplanması
$2\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\blacksquare$	Tamsayılı kesir ile basit kesrin toplanması
$2\frac{1}{3}+3\frac{1}{6}=\blacksquare$	İki tamsayılı kesrin toplanması
$3\frac{1}{5}+2=\blacksquare$	Tamsayılı kesir ile doğal sayının toplanması

Yapılan literatür taraması sonucunda farklı araştırmacıların kesirlerle işlemlere yönelik benzer sorulardan yararlandıkları tespit edilmiştir (Darley, 2005; Hasemann,1981; Herman et al., 2004; Pantziara & Philippou, 2011; Siegler, 2003; Toluk-Uçar, 2009). PKT'nde yer alan maddelere yönelik üç öğretmenin görüşlerine de başvurulmuştur. Öğretmenler derslerde bu tür işlemleri içeren problem çözümleri yaptırdıklarını ve çözümde kullanılan kesir sayılarını değiştirerek öğrencilerden benzer problemler kurmalarını istediklerini belirtmişlerdir. Bunun yanında İlköğretim Matematik Dersi 6-8. Sınıflar Öğretim Programı'ndaki (MEB, 2009) kazanımlar, ders kitabı ve öğrenci çalışma kitaplarındaki problemler ve modeller de dikkate alınarak beş maddenin PKT'nde yer almasına karar verilmiştir. Öğrencilerden bir ders saatinde PKT'nde yer alan her bir maddeye yönelik, çözümüne sadece verilen işlemle ulaşılabilecek, birer problem kurmaları istenmiştir.

Öğrencilerin PKT'ndeki her bir maddeye kurdukları problemler iki farklı araştırmacı tarafından analiz edilmiştir. Daha sonra yapılan analizler karşılaştırılmış ve güçlük türlerinin sınıflandırılması üzerinde fikir birliği sağlanmıştır. Örneğin bu süreçte araştırmacılardan biri, *işlem sonucuna doğal sayı anlamı yükleme* ve *toplanan kesir sayılarına doğal sayı anlamı yükleme* güçlüklerini, başlangıçta aynı kategori altında değerlendirmiştir. Buna karşın analizler üzerine yapılan son görüşmede, bu güçlük türlerinin ayrı ayrı değerlendirilmesi üzerinde fikir birliği sağlanmıştır. Çünkü bazı öğrenciler, kesir sayılarına doğal sayı anlamı yüklemezken sonuca doğal sayı anlamı yüklemişlerdir. Diğer bazı öğrenciler ise sadece toplanan kesir sayılarına doğal sayı anlamı yüklerken, sorulması istenen durumda bu tür bir yanılgıya düşmemişlerdir. Dolayısıyla toplanan kesir sayıları ile sorulması istenen kesir sayısının ifade ediliş şeklinin farklı kategoriler altında sunulmasının daha uygun olacağı ve veri kaybını önleyeceği düşünülmüştür. Öğrencilerin kurdukları problemlerde, birden fazla güçlük türü aynı anda bulunabilmektedir. PKT'nde yer alan beş maddenin her biri için güçlük kategorilerine ait dağılımlar, nicel analizlerle oluşturulmuştur. Bu süreçte her bir problem kurma maddesinde yer alan güçlüklerin sayıları dikkate alınarak yüzde ve frekans tabloları oluşturulmuştur. Öğrencilerin hangi problem kurma maddesinde daha fazla güçlük yaşadıklarını belirleyebilmek amacıyla, problem kurma maddelerine yönelik karşılaşılan güçlüklerin toplam sayıları da sunulmuştur. Güçlük türlerine yönelik açıklamalar ile güçlük türlerine ait yüzde ve frekans değerleri bulgular kısmında sunulmuştur.

BULGULAR

Problemlerin Kavramsal Analizi

Öğrencilerin kurdukları problemlerde yedi farklı güçlük türü tespit edilmiştir. Belirlenen bu güçlük türleri şunlardır: *Toplanan ikinci kesri bütünün kalanı üzerinden ifade etme [Güçlük 1(G1)], parça-bütün ilişkisini kuramama (G2), işlem sonucuna doğal sayı anlamı yükleme (G3), Birim kargaşası (G4), toplanan kesir sayılarına doğal sayı anlamı yükleme (G5), işlemi soru köküne yansıtamama (G6) ve tamsayılı kesirlerin tam kısımlarına anlam yükleyememe (G7).* Karşılaşılan bu güçlük türlerine ait açıklamalar şu şekildedir;

i. Toplanan ikinci kesri bütünün kalanı üzerinden ifade etme (G1): Bu güçlük türünde öğrenciler belirledikleri bir bütün üzerinden toplanan birinci kesir sayısını ifade etmişlerdir. Buna karşın ikinci kesir sayısını ise, başlangıçtaki bütünün kalan kısmı üzerinden ifade etmeye çalışmışlardır. İki öğrenci tarafından sırasıyla $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\blacksquare$ ve $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\blacksquare$ işlemlerine yönelik kurulan ve bu güçlüğü içeren yanıtlar şu şekildedir;

> *Sınıfın ihtiyaçlarını karşılamak için para toplanıyor. Öğretmen toplanan paranın $\frac{1}{2}$'sini tahta kalemi, silgi ve süpürge almak için kullanıyor. Geriye kalan paranın $\frac{3}{4}$'ünü sıra örtüleri almak için kullanıyor. Sınıftan toplanan paranın kaçta kaçı kullanılmıştır?*
>
> *Paramın $\frac{1}{3}$'ü ile kola aldım. Geriye kalan paramın $\frac{1}{2}$'si ile de gofret aldım. Buna göre paramın kaçta kaçını harcadım?*

Birinci problem cümlesinde sınıfta toplanan para miktarının $\frac{1}{2}$'i tahta kalemi, silgi ve süpürge için kullanılırsa, geriye paranın yarısı kalır. Problemin devamında geriye kalan paranın $\frac{3}{4}$'ü ile sıra örtüsü alındığı belirtilmiştir. Dolayısıyla toplanan paranın $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}$'ü yani $\frac{3}{8}$'ü ile sıra örtüsü alınmış olur. Bu durumda toplanan paranın $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$'si kullanılmış olacaktır. Buna karşın PKT'nde $\frac{1}{2}$ ile $\frac{3}{4}$'ün toplanmasına yönelik problem kurulması istenmiştir. Öğrencinin ikinci kesir sayısını, toplanan para yerine geriye kalan para miktarı üzerinden ifade etmesi, bu farklılığın nedenidir. Yazılan diğer problem cümlesinde öğrenci, parasının $\frac{1}{3}$'i ile kola aldığını belirtmiştir. Bu durumda geriye parasının $\frac{2}{3}$'si kalacaktır. Öğrenci, geriye kalan parasının $\frac{1}{2}$'i ile gofret aldığını ifade etmiştir. Dolayısıyla gofrete, parasının $\frac{2}{3} x \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$'ini verecektir. Kola ve gofret için parasının $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$'sini harcamış olacaktır. Buna karşın PKT'nde $\frac{1}{3}$ ile $\frac{1}{2}$ kesir sayılarının toplanmasına yönelik problem kurulması istenmiştir. Benzer şekilde $\frac{1}{2}$ kesir sayısının kalan para üzerinden ifade edilmesi, problem kurulması istenen durumun karşılanamamasına neden olmuştur.

ii. Parça-bütün ilişkisini kuramama (G2): Bu güçlük türü, verilen işlemdeki kesir sayılarının veya toplamlarının bütünden büyük olduğu dikkate alınmadan kurulan problemleri içermektedir. Kesir sayılarının toplamının bütünden büyük olduğu durumu örnekleyen $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \blacksquare$ işlemine yönelik öğrenci yanıtı şu şekildedir;

> *Kumbaramdaki paraların önce $\frac{1}{2}$'sini harcadım. Sonra $\frac{3}{4}$'ünü harcadım. Buna göre paramın ne kadarını harcamış olurum?*

Yazılan problem cümlesinde kumbaradaki bir miktar paranın önce $\frac{1}{2}$'inin daha sonra ise $\frac{3}{4}$'ünün harcandığı belirtilmektedir. Kumbaradaki paranın $\frac{1}{2}$'i harcandığında, geriye paranın yarısı kalacaktır. Öğrenci problemin devamında kumbaradaki paranın $\frac{3}{4}$'ünü daha harcadığını belirtmiştir. İkinci durumda harcanan miktar, geriye kalan miktardan daha fazladır. Bu durum ise parça-bütün ilişkisi açısından anlamlı değildir.

Bu güçlük kategorisinde bazı öğrencilerin, belirledikleri bir bütün üzerinden toplanan birinci kesir sayısını ifade ettikleri, buna karşın ikinci kesir sayısını ise bütünün kalan kısmı şeklinde düşünerek problemler kurdukları da görülmüştür. Dolayısıyla verilen kesir sayılarının toplamının birden büyük veya birden küçük olması durumunda, kurulan problemler parça-bütün ilişkisi açısından tutarsız olmaktadır. Bir öğrencinin $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \blacksquare$ işlemine yönelik verdiği yanıt şu şekildedir;

> *Bir manav elindeki bir kasa elmanın $\frac{1}{3}$'ünü satmıştır. Geriye kalan $\frac{1}{2}$'sini de ertesi gün satmıştır. Buna göre toplam kaçta kaçını satmıştır?*

Yazılan problem cümlesinde, manavın bir kasa elmanın $\frac{1}{3}$'ini sattığı ifade edilmektedir. Bu durumda geriye bir kasa elmanın $\frac{2}{3}$'si kalacaktır. Buna karşın öğrenci, geriye bir kasa elmanın $\frac{1}{2}$'inin kaldığını düşünerek problemi yazmaya devam etmiştir. Bu durum problem kurma sürecinde, kesir sayılarına karşılık gelen miktarlar arasındaki ilişkinin kurulamadığını göstermektedir. Öğrencilerin parçaların büyüklüklerini dikkate almadan sadece kesir sayılarını probleme sözel olarak aktarma çabalarının parça-bütün ilişkisinin oluşturulamamasına neden olduğu söylenebilir.

Bunun yanı sıra bu güçlük türü, tamsayılı kesirlerin bir bütün üzerinden ifade edilerek, bütünden daha büyük çokluğun oluşturulmaya çalışıldığı yanıtları da kapsamaktadır. Öğrencilerin kurdukları problemlerde; *Ali parasının $3\frac{1}{5}$'i ile patates alıyor, cebimdeki paranın $2\frac{1}{3}$'ü ile elbise alıyorum* ve *Ayşe bir şişe sütün $2\frac{1}{3}$'ünü içmiştir* vb… şeklindeki ifadelere yer vermeleri, bu güçlük türünü örneklemektedir. Öğrencilerin tamsayılı kesirleri birim tayin etmeden, basit kesirlerde olduğu gibi bütünün bir kısmı şeklinde ifade etmeleri, bu güçlüğün nedeni olarak gösterilebilir.

iii. İşlem sonucuna doğal sayı anlamı yükleme (G3): PKT'de yer alan maddelerin tamamının sonuçları kesir sayısıdır. Buna karşın bazı öğrencilerin, işlemin sonucunu doğal sayı gibi düşünerek soru köklerini oluşturdukları görülmüştür. İki öğrencinin sırasıyla $2\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\blacksquare$ ve $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\blacksquare$ işlemlerine yönelik bu güçlüğü örnekleyen yanıtları şu şekildedir;

> *Bir kırtasiyeci defterlerinin birinci gün $2\frac{1}{3}$'ünü, ikinci gün ise $\frac{2}{5}$'ini satmıştır. Buna göre toplam kaç defter satılmıştır?*
>
> *Bir market sahibi, yumurtaların önce $\frac{1}{3}$'ünü, sonra ise $\frac{1}{2}$'sini satmıştır. Buna göre market sahibi toplam kaç tane yumurta satmıştır?*

Kurulan birinci problemde, birinci gün defterlerin $2\frac{1}{3}$'inin, ikinci gün ise $\frac{2}{5}$'sinin satıldığı belirtilmiştir. Böyle bir problem kurgusuna göre iki gün sonunda defterlerin $2\frac{11}{15}$'i satılmıştır. Bu durumda *kaç defter satılmıştır?* soru köküne verilecek cevap $2\frac{11}{15}$ olamayacaktır. Çünkü defterlerin sayısı süreksiz çokluk olup kesirler ile ifade edilemez. Ayrıca yazılan problemde, defterlerinin birinci gün $2\frac{1}{3}$'ini sattığı şeklindeki ifadesi ile parça-bütün ilişkisi de göz ardı edilmiştir. Benzer şekilde yazılan diğer problemde, toplamdan elde edilecek $\frac{5}{6}$ kesir sayısı, soru kökünde *kaç tane satılmıştır?* İfadesi ile karşılanmaya çalışılmıştır.

iv. Birim kargaşası (G4): Bu güçlük türü, kesir sayılarının uygun birimle ifade edilemediği ve kesir sayıları için yazılan birimlerin birbiri ile tutarlı olmadığı problemleri içermektedir. Bir öğrencinin $3\frac{1}{5}+2=\blacksquare$ işlemine verdiği yanıt şu şekildedir;

> *Bir pastanın $3\frac{1}{5}$'ini Ayşe yemiştir. Bu pastanın 2 dilimini de ben yedim. Buna göre pastanın ne kadarı yenilmiştir?*

Bu problem cümlesinde 2'ye pasta dilimleri anlamı yüklenmiştir. Buna karşın problem cümlesinde Ayşe'nin pastanın $3\frac{1}{5}$'ini yediği belirtilmektedir. Yazılan problemde $3\frac{1}{5}$'e dilim miktarı anlamının yüklenemediği görülmektedir. Dolayısıyla toplama işlemindeki $3\frac{1}{5}$ kesir sayısı ile 2 doğal sayısı aynı birimler üzerinden ifade edilmemiştir. Bu şekliyle *bir pastanın $3\frac{1}{5}$'i* ifadesi bütünden daha büyük miktarı temsil ettiğinden, parça-bütün ilişkisi açısından da tutarlı değildir.

Başka bir öğrenci $2\frac{1}{3}+3\frac{1}{6}=\blacksquare$ işlemine, *Annem kardeşime $2\frac{1}{3}$ kadar süt verdi. Bana ise $3\frac{1}{6}$ kadar süt verdi. Buna göre annem bize toplam ne kadar süt verdi?* Şeklinde problem kurmuştur. Yazılan problem cümlesinde $2\frac{1}{3}$ *kadar süt* ifadesi ile anlatılmak istenen açık değildir. Çünkü tamsayılı kesrin, litre, bardak veya farklı bir ölçeği mi temsil ettiği belirgin değildir. Bu yönüyle yazılan problemde kesir sayılarına uygun birimin oluşturulamadığı görülmektedir.

v. Toplanan kesir sayılarına doğal sayı anlamı yükleme (G5): Bu güçlük türü, toplanan kesir sayılarının, doğal sayılarla ifade edilebilecek çokluklar üzerinden oluşturulduğu problemleri içermektedir. İki öğrencinin sırasıyla $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\blacksquare$ ve $2\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\blacksquare$ işlemlerine verdikleri yanıtlar şu şekildedir;

Babam bana $\frac{1}{3}$ tane kağıt aldı. Kardeşime de $\frac{1}{2}$ tane kağıt aldı. Kardeşim ve benim toplam kaç tane kağıdımız olur?

Elif birinci gün $2\frac{1}{3}$ tane tahta kalemi satıyor. İkinci gün ise $\frac{2}{5}$ tane daha kalem satıyor. Buna göre Elif toplam kaç tane kalem satmıştır?

Birinci problem cümlesinde $\frac{1}{3}$ ve $\frac{1}{2}$ kesir sayıları, kağıt sayıları ile eşleştirilmiştir. $\frac{1}{3}$ *tane* ve $\frac{1}{2}$ *tane* ifadeleri ile problem cümlelerinde kesir sayılarına doğal sayı anlamı yüklendiği görülmektedir. Benzer şekilde yazılan diğer problem cümlesinde de kalem sayıları $2\frac{1}{3}$ *tane* ve $\frac{2}{5}$ *tane* ifadeleri ile karşılanmaya çalışılarak, kesir sayılarına doğal sayı anlamı yüklenmiştir. Bu yönüyle öğrencinin doğal sayılardaki alışkanlıklarını kesirlerle yapılan işlemlere de taşıdığı söylenebilir. Ayrıca öğrenciler, *toplam kaç tane kağıdımız olur?* ve *toplam kaç tane kalem satmıştır?* şeklindeki soru kökleri ile işlem sonucuna doğal sayı anlamı yükleyerek G3 güçlüğünü de sergilemişlerdir.

vı. İşlemi soru köküne yansıtamama (G6): Bu güçlük türü, toplama işleminin soru kökünde ifade edilemediği problemleri kapsamaktadır. Öğrenciler kesir sayılarını ifade etmelerine rağmen soru kökünde toplama işlemini karşılayacak sözel cümleler oluşturamamışlardır. Bir öğrencinin $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\blacksquare$ işlemine yönelik yanıtı şu şekildedir;

Paramın $\frac{1}{3}$'ünü akşam harcadım. Paramın $\frac{1}{2}$'sini ise sabah harcadım. Buna göre geriye paramın kaçta kaçı kaldı?

Yazılan problemde, paranın akşam $\frac{1}{3}$'inin, sabah ise $\frac{1}{2}$'inin harcandığı belirtilmektedir. Bu durumda toplam paranın $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$'i harcanmıştır. Problemde ise harcamalar sonunda paranın kaçta kaçının kaldığı sorulmaktadır. Bu haliyle problemin çözümüne $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ işlemi yerine $1-\frac{5}{6}$ işlemi ile ulaşılacaktır. Aynı öğrencinin $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\blacksquare$ işlemine yönelik yazdığı *Annemin aldığı elmaların $\frac{1}{2}$'sini ben aldım. $\frac{3}{4}$'ünü ise abim aldı. Annemin aldığı elmaların kaçta kaçı kaldı?* Şeklindeki problem cümlesinde de benzer durum söz konusudur. Dolayısıyla her iki problemde de öğrencinin, toplam yerine geriye kalan miktarı bulmayı gerektiren soru kökü oluşturduğu görülmektedir. Ayrıca yazılan ikinci problemde, mevcut parasından daha büyük miktarı harcaması, parça-bütün ilişkisinin de göz ardı edildiğini göstermektedir.

vıı. Tamsayılı kesirlerin tam kısımlarına anlam yükleyememe (G7): Bu kategori, tamsayılı kesirlerin tam kısımlarını dikkate almadan sadece basit kesir sayıları üzerinden kurulan problemleri içermektedir. Bunun yanında bazı öğrencilerin tamsayılı kesrin tam kısmı ile kesir kısmını çarpmayı gerektiren problemler kurdukları da görülmüştür. Bu güçlük türleri ile PKT'nin üç, dört ve beşinci maddelerinde karşılaşılmıştır. İki öğrencinin $2\frac{1}{3}+3\frac{1}{6}=\blacksquare$ ve $2\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\blacksquare$ işlemlerine yönelik kurdukları problemler sırasıyla şu şekildedir;

Bir parkın $\frac{1}{3}$'üne kaydırak, $\frac{1}{6}$'sına da bisiklet yolu yapılmıştır. Buna göre kaydırak ve bisiklet yolu yapılan alan, parkın ne kadarıdır?

Annemin verdiği 2 liranın $\frac{1}{3}$'ünü kumbarama attım. Benim kumbaramda $\frac{2}{5}$ kadar param vardır. Bu durumda kumbaramda ne kadar param olur?

Yazılan birinci problem cümlesinde, toplanan tamsayılı kesirlerin tam kısımlarının kurulan problemde dikkate alınmadığı görülmektedir. Yazılan ikinci problem cümlesinde 2 bir bütün olarak düşünülmüş, $\frac{1}{3}$ ise bu bütünün $\frac{1}{3}$'i olarak temsil edilmiştir. Dolayısıyla *Annemin verdiği 2* *liranın $\frac{1}{3}$'ünü kumbarama attım* ifadesi $2x\frac{1}{3}$ işlemini gerektirmektedir. Bunun yanı sıra yazılan ikinci problem cümlesinde öğrencinin $\frac{2}{5}$ *kadar param vardır* ifadesi ile birim kargaşası yaşadığı da görülmektedir.

Kurulan Problemlerdeki Güçlük Çeşitlerinin Dağılımı

Toplamın basit kesir olduğu PKT'nin birinci maddesi ve toplamın tamsayılı kesir olduğu PKT'nin ikinci maddesine yönelik kurulan problemlerde görülen güçlüklere ait dağılım Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 2. İki basit kesrin toplamına kurulan problemlerdeki güçlüklere ait dağılım

Maddeler	G1	G2	G3	G4	G5	G6	Toplam
$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\blacksquare$	21(9,1)	6(2,6)	47(20,2)	55(23,7)	35(15,1)	68(29,3)	232(100)
$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\blacksquare$	19(6,2)	102(33,3)	41(13,4)	50(16,4)	31(10,1)	63(20,6)	306(100)

* Tablodaki veriler frekans(yüzde) şeklinde sunulmuştur.

Tablo 2'ye göre iki basit kesrin toplamına yönelik kurulan problemlerde altı farklı güçlüğün yaşandığı görülmektedir. Toplamın basit kesir olduğu $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\blacksquare$ işlemine yönelik kurulan problemlerde, toplam 232 güçlük yaşanmıştır. Bu madde için en fazla güçlük G6 kategorisinde, en az güçlük ise G2 kategorisinde yaşanmıştır. Öğrenci başına düşen güçlük sayısı ortalaması ise yaklaşık 1,1'dir. Bunun yanında toplamın tamsayılı kesir olduğu $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\blacksquare$ işlemine yönelik kurulan problemlerde toplam 306 güçlük yaşanmıştır. Bu maddeye yönelik en fazla güçlük G2 kategorisinde, en az güçlük ise G1 kategorisinde görülmüştür. Öğrenci başına düşen güçlük sayısı ortalaması ise yaklaşık 1,46'dır. Bu bulgulardan öğrencilerin toplamın tamsayılı kesir olduğu iki basit kesrin toplamına yönelik daha fazla güçlük yaşadıkları söylenebilir. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\blacksquare$ işleminde öğrencilerin toplamın tamsayılı kesir olacağını göz ardı etmeleri parça-bütün ilişkisini kuramama kategorisindeki güçlük sayısının artışını beraberinde getirmiştir. Dolayısıyla bu durumun, $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\blacksquare$ işlemine kurulan problemlerde görülen toplam güçlük sayısının yüksek oluşunun nedeni olarak düşünülebilir.

Toplananlardan en az birinin tamsayılı kesir olduğu toplama işlemine yönelik kurulan problemlerde görülen güçlüklere ait dağılım Tablo 3'te sunulmuştur.

Tablo 3. Toplananlardan birinin tamsayılı kesir olduğu toplama işlemine kurulan problemlerdeki güçlüklere ait dağılım

Maddeler	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	Toplam
$2\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\blacksquare$	13(4,4)	84(28,3)	38(12,8)	94(31,6)	24(8,1)	31(10,4)	13(4,4)	297(100)
$2\frac{1}{3}+3\frac{1}{6}=\blacksquare$	11(3,9)	72(25,6)	24(8,6)	104(37)	27(9,6)	27(9,6)	16(5,7)	281(100)
$3\frac{1}{5}+2=\blacksquare$	10(3,6)	67(23,9)	27(9,6)	98(35)	33(11,8)	28(10)	17(6,1)	280(100)

* Tablodaki veriler frekans(yüzde) şeklinde sunulmuştur.

Tablo 3'e göre, kurulan problemlerde yedi farklı güçlüğün yaşandığı görülmektedir. İki basit kesrin toplamına yönelik kurulan problemlerde görülen güçlüklerden farklı olarak bu üç maddede G7 güçlüğü de görülmüştür. Bu güçlük türünde öğrenciler, tamsayılı kesirlerin tam kısımlarını, kurdukları problemlerde göz ardı etmişlerdir. Tamsayılı kesir ile bir basit kesrin toplandığı $2\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\blacksquare$ işlemine yönelik kurulan problemlerde toplam 297 güçlük yaşanmıştır. Bu madde için en fazla güçlük G4, en az güçlük ise G1 ve G7 kategorilerinde yaşanmıştır. Öğrenci başına düşen güçlük sayısı ortalaması ise yaklaşık 1,41'dir. İki tamsayılı kesrin toplandığı $2\frac{1}{3}+3\frac{1}{6}=\blacksquare$ işlemine yönelik kurulan problemlerde toplam 281 güçlük görülmüştür. Bu maddeye yönelik en fazla güçlük G4 kategorisinde, en az güçlük ise G1 kategorisinde yaşanmıştır. Öğrenci başına düşen güçlük sayısı ortalaması yaklaşık 1,34'tür. Tamsayılı kesir ile bir doğal sayının toplandığı $3\frac{1}{5}+2=\blacksquare$ işlemine yönelik kurulan problemlerde toplam 280 güçlük görülmüştür. Bu madde için en fazla güçlük G4 kategorisinde, en az güçlük ise G1 kategorisinde yaşanmıştır. Öğrenci başına düşen güçlük sayısı ortalaması ise yaklaşık 1,33'tür. Tablo 3'teki bulgular dikkate alındığında toplananlardan en az birinin tamsayılı kesir olduğu toplama işlemlerine yönelik kurulan problemlerde görülen toplam güçlük sayısının birbirine yakın olduğu söylenebilir. Bunun yanı sıra öğrenciler her üç madde için de en fazla güçlüğü G4 kategorisinde, en az güçlüğü ise G1 kategorisinde yaşamışlardır.

TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

İlköğretim yedinci sınıf öğrencilerinin kesirlerde toplama işlemine yönelik kurdukları problemlerde; toplanan ikinci kesri bütünün kalanı üzerinden ifade etme, parça-bütün ilişkisini kuramama, işlem sonucuna doğal sayı anlamı yükleme, birim kargaşası, toplanan kesir sayılarına doğal sayı anlamı yükleme, işlemi soru köküne yansıtamama ve tamsayılı kesirlerin tam kısımlarına anlam yükleyememe şeklinde yedi güçlük tespit edilmiştir. G1,G2,G3,G4,G5 ve G6 türü güçlükler PKT'nde yer alan bütün maddelerde görülmüşken, G7 güçlük türü sadece toplananlardan en az birinin tamsayılı kesir olduğu maddelerde görülmüştür. Yaşanan bu güçlüklerin, parça-bütün ilişkisini oluşturamama, kesir sayılarının belirttiği çoklukları algılayamama ve doğal sayılardaki alışkanlıkların kesirlere de aktarılma çabası üzerine yoğunlaştığı söylenebilir. Belirlenen güçlüklerin içeriği ve kurulan problemlerde tespit edilen güçlük sayılarının yüksek oluşu, öğrencilerin kesirler ve kesirlerde toplama işlemine yönelik kavramsal boyutta eksikliklerinin olduğuna işaret etmektedir. Bu sonuç, Charalambous, Delaney, Mhuire, Hsu ve Mesa (2010) tarafından belirtilen kesir işlemlerine yönelik güçlüklerin, kesir öğrenimindeki güçlüklerden ayrı değerlendirilemeyeceği ve köklerinin kesir kavramlarına dayandığı sonucunu desteklemektedir.

PKT'nde her bir maddeye kurulan problemlerde görülen güçlüklerin ortalamalarının birden büyük olması, öğrencilerin problem kurma ve kesirleri gerçek yaşam durumları ile ilişkilendirme becerilerinin düşük olduğuna işaret etmektedir. Her bir problem kurma maddesindeki toplam güçlük sayılarının dağılımı dikkate alındığında, iki basit kesrin toplamına yönelik problem kurmada en fazla güçlüğü toplamın tamsayılı kesir olduğu maddede (306 güçlük), en az güçlüğü ise sonucun basit kesir olduğu iki basit kesrin toplamında (232 güçlük) yaşamışlardır. İki basit kesrin toplamının bütünden büyük olduğunun göz ardı edilmesi, en fazla güçlüğün bu kategoride görülmesinin nedeni olarak gösterilebilir.

Kerslake (1986), öğrencilerin kesirlere yönelik yaşadıkları güçlüklerin temelinde kesirlerin bir sayı olarak algılanamaması bunun yerine daha çok bir şeklin/bütünün belli bir kısmı veya bir miktarı şeklinde görülmesinin yer aldığını belirtmiştir. Öğrencilerin sonucun tamsayılı kesir olduğu iki basit kesrin toplamına yönelik kurdukları problemlerde toplanan kesir sayılarını bütünün bir parçası şeklinde düşünmeleri, daha fazla güçlük yaşanmasının nedeni olarak düşünülebilir. Araştırmacılar, ders ortamlarında kesirlerin farklı anlamlarını içeren etkinliklere yer verilmesinin, öğrencilerin kesirlere yönelik kavramsal anlamalarını geliştirmede katkı sağlayacağını belirtmektedirler (Olkun & Toluk, 2003; Van De Walle, 2004). Bu yönüyle kesirlerin diğer anlamlarının göz ardı edilerek sadece bütünün belli bir kısmı veya miktarı anlamı ile düşünülmesi, kavramsal anlamalarının gelişimi önünde engel teşkil edebilecektir. Bunun yanında iki basit kesrin toplamına yönelik problem kurmada öğrencilerin basit kesirlere uygun birimler oluşturmada ve işlemi soru köküne yansıtmada da güçlükler yaşadıkları tespit edilmiştir. İlköğretim Matematik Dersi 6-8. Sınıflar Öğretim Programı'nda (MEB, 2009: s.17) matematiğin sembol ve terimlerinin kendi içinde, farklı disiplinlerde ve öğrencinin yaşantısında uygun ve doğru bir biçimde kullanılmasına, matematikle uğraşma sürecinde ve sonrasında sözlü anlatımlardan yararlanılmasına önem verilmektedir. Buna karşın öğrencilerin kurdukları problemlerde kesirleri ifade ederken uygun birimler yerine "kadar" şeklindeki ifadeleri *kullanmaları,* matematiğin sembol ve terimlerini uygun ve doğru bir biçimde kullanabilme becerilerinin eksikliğine işaret etmektedir.

Bir tamsayılı kesir ile basit kesir, doğal sayı ve tamsayılı kesrin toplandığı durumlara yönelik kurulan problemlerde görülen toplam güçlük sayısı birbirine yakındır. Öğrenciler toplananlardan birinin tamsayılı kesir olduğu maddelere yönelik kurdukları problemlerde en fazla güçlüğü birim kargaşası kategorisinde yaşamışlardır. Bunun yanında yüksek oranda görülen diğer bir güçlüğün *parça-bütün ilişkisini kuramama* olduğu tespit edilmiştir. Öğrencilerin basit kesirleri ifade etmedeki alışkanlıklarını tamsayılı kesirlere yansıtma çabalarının bu güçlüğe neden olduğu düşünülebilir. Literatürde de kesirlerin sıklıkla basit kesirler üzerinden parça-bütün ilişkisine dayalı olarak öğretilmesinin, tamsayılı kesirlerin kavranılmasını güçleştirdiğinin belirtilmesi (Gallistel & Gelman, 1992; Misquitta, 2011; Ni & Zhou, 2005; Pitkethly & Hunting, 1996), bu sonucu desteklemektedir. Toplananların basit kesir olduğu durumlarda öğrenciler, basit kesirleri sıklıkla birim kullanılmadan bütünün belirli bir miktarı (örn, bir pastanın $\frac{1}{3}$'ü, bir miktar paranın $\frac{1}{3}$'ü gibi…) şeklinde ifade etmişlerdir. Tamsayılı kesirlerinde benzer şekilde ifade edilmeye çalışılması, bütünden daha büyük miktarın ortaya çıkmasını beraberinde getirmiştir (örn, *Bir pastanın* $3\frac{1}{5}$*'ini Ayşe yemiştir* gibi…). Dolayısıyla işlem şekilsel olarak karşılamasına rağmen parça-bütün ilişkisi açısından tutarsız problemler ortaya çıkmıştır. Ayrıca bazı öğrencilerin tamsayılı kesirlerin tam kısımlarını göz ardı ederek, sadece iki basit kesrin toplamına yönelik problemler de kurmuşlardır. Mack (1995), öğrencilerin sözel ifadelere karşılık gelen tamsayılı kesri oluştururken kesrin tam kısmını göz ardı ettiklerini belirtmiştir ($1\frac{1}{3}$ kesri, $\frac{1}{3}$ şeklinde yazılmaktadır). Benzer şekilde Yanik, Helding ve Flores (2008) öğrencilerin tamsayılı kesirlerin tam kısımlarını anlamlandırmakta zorlandıklarını ve basit kesir gibi düşündüklerini belirtmektedirler. Araştırma sonuçları, literatürde belirtilen bu güçlüğün problem kurmada da yaşandığını göstermektedir.

Yapılan araştırmalarda, kesirlerde toplama işlemine yönelik öğrenciler, toplanan kesirlerin pay ve paydalarını ayrı ayrı düşünüp işlem yaptıkları, hesaplama hataları yaptıkları, problem çözümlerinde yanlış işlemi uyguladıkları, kesirlerin birimlerini göz ardı ettikleri, parça-bütün ilişkisine yönelik güçlükler yaşadıkları, tamsayılı kesirlerin tam kısımlarını veya kesir kısımlarını göz ardı ederek kısmi işlemler yaptıkları, öğrendikleri kuralları daha sonraki kurallara hatalı şekilde aktardıkları, kesirleri ortak paydaya dönüştüremedikleri ve toplama işleminin sonucunu tahmin edemedikleri belirtilmektedir (Brueckner, 1928; Darley, 2005; Frankenstein, 1998; Hasemann, 1981; Kerslake, 1986; Kocaoğlu & Yenilmez, 2010; Lamon, 1999; Mack, 1995; Siegler, 2003; Soylu & Soylu, 2005). Eğer araştırmada öğrencilerden verilen işlemleri yapmaları veya bu işlemleri çözümünde kullanmayı gerektirecek problemleri çözmeleri istenseydi, muhtemelen literatürde belirtilen benzer güçlükler ile karşılaşılacaktı. Buna karşın problem çözme ve kurmada karşılaşılan güçlüklerin genel olarak birbirine benzer olmakla birlikte, bazı farklı yönlerinin olduğu da tespit edilmiştir. Örneğin problem kurmada görülen *birim kargaşası* güçlük türü, toplanan kesir sayıları için yazılan birimlerin birbiri ile tutarlı olmadığı durumları da kapsamaktadır. Literatürde öğrencilerin tamsayılı kesirlerin tam kısımlarını veya kesir kısımlarını göz ardı ederek kısmi işlemler yaptıkları belirtilmektedir. Buna karşın problem kurma sürecinde öğrencilerin tamsayılı kesirlerin sadece tam kısımlarını göz ardı ederek problemler kurdukları tespit edilmiştir. Yine literatürde öğrencilerin toplanan kesirlerin pay ve paydalarını ayrı doğal sayılarmış gibi düşünerek topladıklarına yer verilmektedir. Buna karşın problem kurma sürecinde öğrencilerin, işlem sonucuna ve toplanan kesir sayılarının her birine doğal sayı anlamı yükleme çabası içerisinde oldukları belirlenmiştir.

Araştırma sonuçları, ilköğretim yedinci sınıf öğrencilerinin kesirlerde toplama işlemine yönelik hazırlanan beş problem kurma maddesine verdikleri yanıtlardan elde edilmiştir. Bunun yanında daha geniş örneklem ve farklı özellikleri içeren kesir toplamları üzerinden yapılabilecek analizlerin, olası diğer güçlüklerin ortaya konulmasına imkan sağlayacağı düşünülmektedir. Belirlenen bu güçlüklere yönelik hatalı problemler ders ortamlarında tartışmaya açılarak öğrencilerdeki olası güçlükler veya kavram yanılgıları giderilebilir. Şüphesiz bu tür tartışma ortamlarına öğretmenlerin rehberlik edeceği dikkate alındığında, öğretmenlerin belirlenen güçlüklere yönelik farkındalıkları araştırılarak varsa eksiklikleri hizmet içi seminerlerle giderilebilir. Araştırmada sembolik kesir temsillerine yönelik problem kurmada karşılaşılan güçlükler tespit edilmiştir. Bunun yanında farklı problem kurma etkinlikleri üzerinden de bu tür analizler yapılabilir. Ayrıca bu güçlüklerin nedenlerinin daha iyi bir şekilde anlaşılması için nitel yöntemler ile derinlemesine analizler de yapılabilir.

KAYNAKÇA

Abu-Elwan, R. (2002). Effectiveness of problem posing strategies on prospective mathematics teachers' problem solving performance. *Journal of Science and Mathematics Education in S.E. Asia, 25*(1), 56-69.

Ahmad, W. F. B. W. & Latih, N. H. B. A. (2010). Development of a mathematics courseware: Fractions. *Paper presented at the Asian Technology Conference in Mathematics,* Malaysia.

Akay, H. (2006). *Problem kurma yaklaşımı ile yapılan matematik öğretiminin öğrencilerin akademik başarısı, problem çözme becerisi ve yaratıcılığı üzerindeki etkisinin incelenmesi (Yayınlanmamış Doktora Tezi).* Gazi Üniversitesi, Ankara.

Alacacı, C. (2009). Öğrencilerin kesirler konusundaki kavram yanılgıları. Bingölbali, E. & Özmantar, M. F. (Eds.), *İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri*. Pegem Akademi Yayınları, Ankara.

Amato, A. S. (2005). Developıng students' understandıng of the concept of fractıons as numbers. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Australia.

Birgin, O. ve Gürbüz, R. (2009). İlköğretim II. Kademe Öğrencilerinin Rasyonel Sayılar Konusundaki İşlemsel Ve Kavramsal Bilgi Düzeylerinin İncelenmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, XXII*(2), 529-550.

Brueckner, L. J. (1928). Analysis of errors in fractıon. *The Elementary School Journal, 28*(10), 760-770.

Bulgar, S. (2003). Children's sense-making of division of fractions. *The Journal of Mathematical Behavior, 20,* 319-334.

Cai, J. (2003). Singaporean students' mathematical thinking in problem solving and problem posing: an exploratory study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34*(5), 719-737.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y. & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning, 12*, 117–151.

Charalambous C. Y. & Pantazi, D. P. (2005). Revisiting a theoretical Model on Fractions: Implications for teaching and Research. In Chick, H.L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol 2, pp. 233 – 240).

Crespo, S. & Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal Mathematics Teacher Education, 11,* 395–415.

Darley, J. W. (2005). *Ninth grader's ınterpretations and use of contextualized models of fractions and algebraic properties: A classroom-based approach (Unpublished doctoral dissertation).* University of South Carolina.

Dickerson, V. M. (1999). The *impact of problem-posing instruction on the mathematical problem-solving achievement of seventh graders (Unpublished doctoral dissertation).* University of Emory, Atlanta.

Doğan, M. ve Yeniterzi, B. (2011). İlköğretim 7. Sınıf Öğrencilerinin Rasyonel Sayılar Konusundaki Hazır Bulunuşlukları. *Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi, 31,*217-237.

English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics, 34*, 183-217.

English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 83-106.

English, L. D. & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: Models and processes*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Frankenstein, M. (1998). Reading the world with maths: Goals for a critical mathematical literacy curriculum. In P. Gates (Ed.), *Proceedings of the First International Mathematics Education and Society Conference* (pp. 180-189). Nottingham: Centre for the Study of Mathematics Education, Nottingham University.

Gallistel, C. R. & Gelman, R . (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition, 44*(1–2), 43–74.

Hasemann, K. (1981). On difficulties with fractions. *Educational Studies in Mathematics 12,* 71-87.

Herman, J., Ilucova, L., Kremsova, V., Pribyl, J., Ruppeldtova, J., Simpson, A., Stehlikova, N., Sulista, M. & Ulrychova, M. (2004). "Images of fractions as process and images of fractions in processes." *Proceedings of the 28th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education*, Bergen.

Işık, C. (2011). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kesirlerde Çarpma ve Bölmeye Yönelik Kurdukları Problemlerin Kavramsal Analizi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 41*, 231-243.

Işık, C., Işık, A. ve Kar, T. (2011). Öğretmen Adaylarının Sözel ve Görsel Temsillere Yönelik Kurdukları Problemlerin Analizi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 30,* 39-49.

Işık, C. ve Kar, T. (2012). Matematik Dersinde Problem Kurmaya Yönelik Öğretmen Görüşleri Üzerine Nitel Bir Çalışma. *Milli Eğitim Dergisi, 194,* 199-215.

Işıksal, M. (2006). *A study on pre-service elementary mathematics teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge regarding the multiplicatıon and division of fractions (unpublished doctoral dissertation)*. Middle East Technical University, Turkey.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project.* Windsor, England: NFER-Nelson.

Kocaoğlu, T. ve Yenilmez, K. (2010). Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Kesir Problemlerinde Yaptıkları Hatalar ve Kavram Yanılgıları. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi, 14, 71-85.*

Küçük, A. ve Demir, B. (2009). İlköğretim 6–8. Sınıflarda Matematik Öğretiminde Karşılaşılan Bazı Kavram Yanılgıları Üzerine Bir Çalışma. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi, 13*, 97-112.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. London: Erlbaum.

Lowrie, T. (2002). Young children posing problems: the influence of teacher intervention on the type of problems children pose. *Mathematics Education Research Journal,14*(2), 87-98.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21,* 16-32.

Mack, N. K. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(5), 422-441.

Mcmillan, H. J. & Schumacher, S. (2010). *Research in education*. Boston, USA: Pearson Education.

MEB (2009). *İlköğretim Matematik Dersi 1-5. Sınıflar Öğretim Programı.* Ankara: MEB Basımevi.

MEB (2009). *İlköğretim Matematik Dersi 6-8. Sınıflar Öğretim Programı.* Ankara: MEB Basımevi.

Misquitta, R. (2011). A review of the literature: Fraction instruction for struggling learners in mathematics. *Learning Disabilities Research & Practice, 26*(2), 109–119.

Mok, I., Cai, J. & Fong-Fung, A. (2008). Missing learning opportu-nities in classroom instruction: evidence from an analysis of a well-structured lesson on comparing fractions. *The Mathematics Educator, 11*(1-2), 111-126.

Ni, Y. & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist , 40*(1), 27–52.

Olkun, S. ve Toluk, Z. (2003). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi*. Ankara, Anı yayıncılık.

Pantziara, M. & Philippou, G. (2011). Levels of students' "conception" of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), 61-83.

Pitkethly, A. & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 5-38.

Redmond, A. (2009). *Prospective elementary teachers' division of fractions understanding: A mixed methods study (Unpublished doctoral thesis).* Oklahoma State University.

Redmond, A. & Utley, J. (2007). "Prospective elementary teachers understanding of and attitudes towards the division of fractions". *Paper presented at the Research Council on Mathematics Learning Annual Convention, Oklahoma City.*

Rule, A. C. & Hallagan, J. E. (2006). "Preservice elementary teachers use drawings and make sets of materials to explain multiplication and division by fractions." *Paper Presented at the 2nd Annual Preparing Mathematicians to Educate Teachers (PMET) Conference at Oswego, New York.*

Sharp, J. & Adams, B. (2002). Children's constructions of knowledge for fraction division after solving realistic problems. *The Journal of Educational Research*, *95*(6), 333-347.

Siegler, R. S. (2003). Implications of cognitive science research for mathematics education. In Kilpatrick, J., Martin, W. B., & Schifter, D. E. (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 219-233). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathmatics.

Soylu, Y. ve Soylu, C. (2005). İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Kesirler Konusundaki Öğrenme Güçlükleri: Kesirlerde Sıralama, Toplama, Çıkarma, Çarpma Ve Kesirlerle İlgili Problemler. *Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi. 7*(2), 101-117.

Ticha, M. & Hošpesová, A. (2009). Problem posing and development of pedagogical content knowledge in pre-service teacher training. *Paper presented at the meeting of CERME 6,* Lyon.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conception: The case of division of fraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5-25.

Toluk-Uçar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education*, *25*, 166–175.

Van De Walle, J. A. (2004). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally* (5th ed.). Boston, MA: Pearson.

Yanik, H. B., Helding, B. & Flores, A. (2008). Teaching the Concept of Unit in Measurement Interpretation of Rational Numbers. *Elementary Education Online, 7*(3), 693-705, [Online]: http://ilkogretim-online.org.tr adresinden 10 Aralık 2011 tarihinde indirilmiştir.

Zembat, İ.Ö. (2007). Sorun Aynı – Kavramlar; Kitle Aynı - Öğretmen Adayları. *Elementer Education Online, 6*(2), 305-312, [Online]: http://ilkogretim-online.org.tr adresinden 12 Aralık 2011 tarihinde indirilmiştir.